

CALCULUS 11



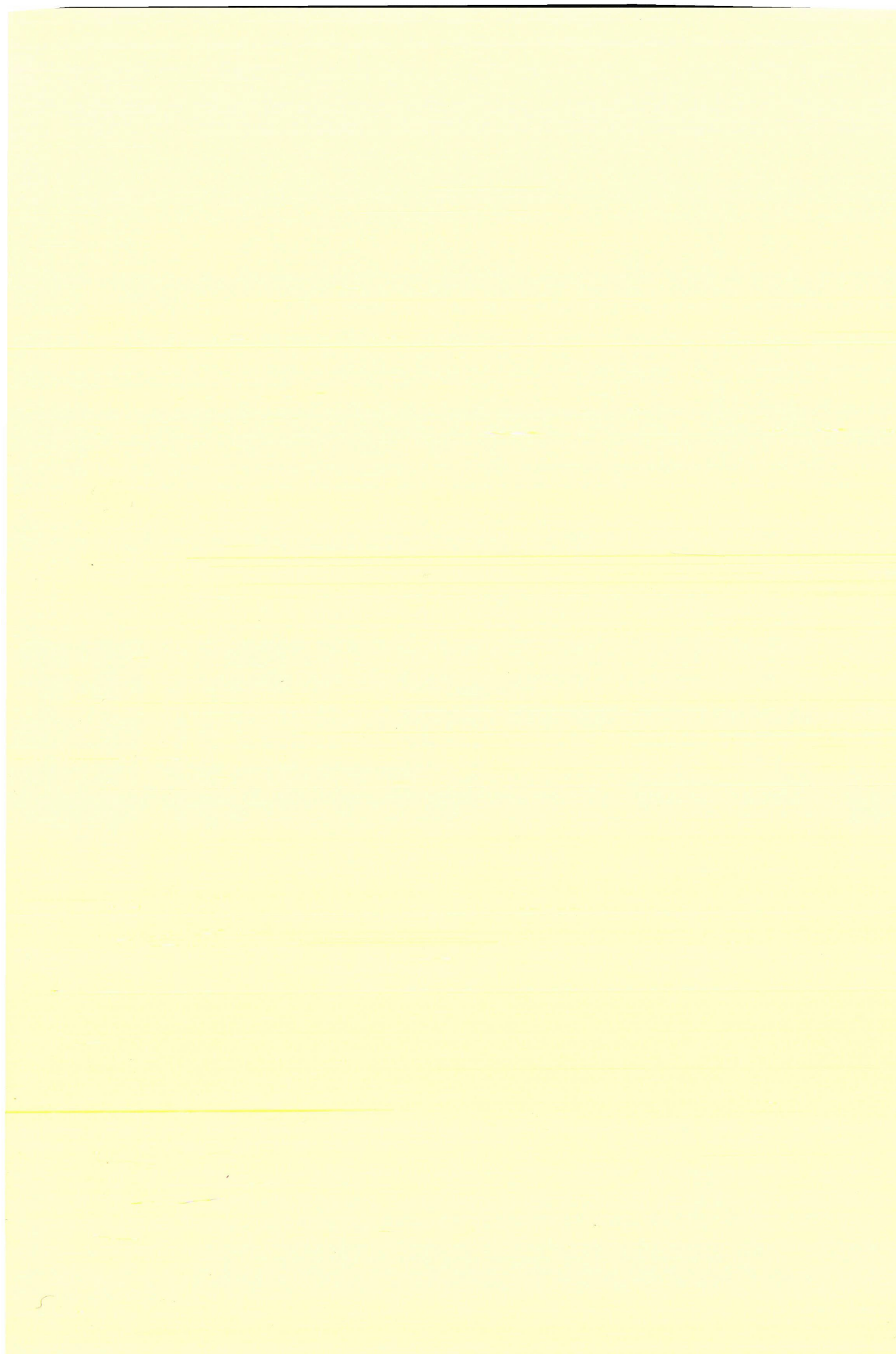
OPETTAJAN AINEISTO

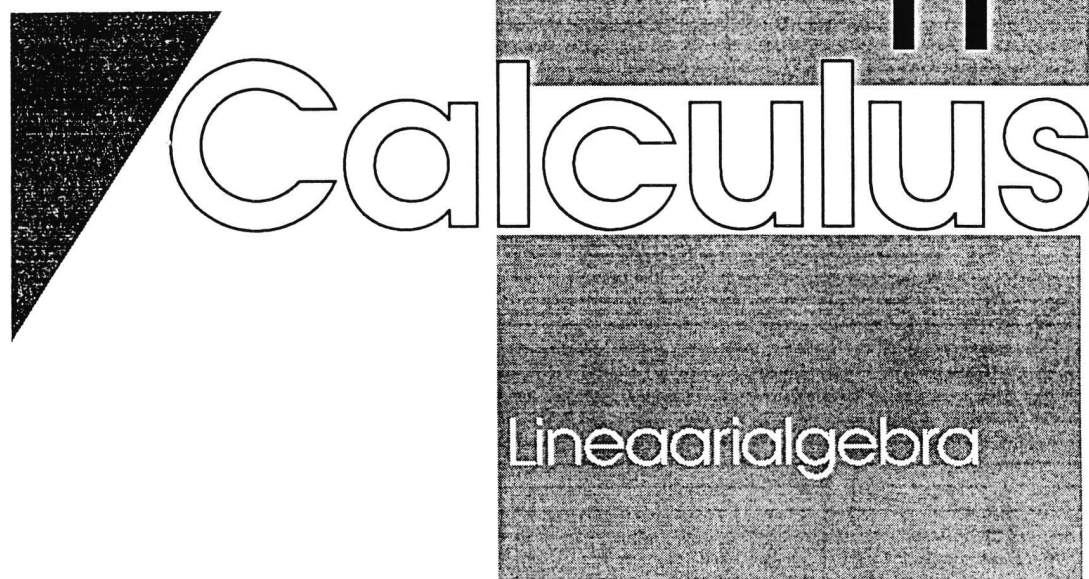
Paavo Jäppinen
Alpo Kupiainen
Matti Räsänen

Otava
K51 Tno 327C
ISBN 951-1-16064-8



9 789511 160649





Opettajan aineisto

PAAVO JÄPPINEN

ALPO KUPIAINEN

MATTI RÄSÄNEN



HELSINGISSÄ KUSTANNUSOSAKEYHTIÖ OTAVA

Sisällys

Alkusanat

Tehtävien ratkaisuja

Matriisit	3
Lineaariset yhtälöryhmät	12
Lineaariavaruus	27
Sisätuloavaruus	35
Tason lineaarikuvaukset	38
Kertauskokeet	44

Alkusanat

Tämä opettajan aineisto liittyy oppikirjaan **Calculus 11, Lineaarialgebra**, ja se on tarkoitettu helpottamaan opettajan työtä ja nopeuttamaan tehtäviin tutustumista.

Kaikkien tehtävien ratkaisuja ei ole esitetty. Mukaan ei ole yleensä otettu kaikkein helpoimpia tehtäviä, joissa harjoitellaan vain käsitteiden käyttöä ja jotka ovat melko mekaanisia. Sitä vastoin sellaiset tehtävät, jotka edellyttävät soveltamista, analysointia tai todistamista, on ratkaistu.

Tehtävien ratkaisuihin on pyritty liittämään sanallista selvitystä. Tavoitteena on, että myös oppilaat tottuvat esittämään tarpeelliset perustelut ja laatimaan vastauksensa niin, että siitä käy ilmi, miten ratkaisu on ajateltu. Tämä edellyttää usein juuri täydentävän sanallisen selvityksen käyttöä.

Helmikuussa 1999
Tekijät

1. painos

© 1999 Paavo Jäppinen, Alpo Kupiainen,
Matti Räsänen ja Kustannusosakeyhtiö Otava

Toimitus: Riitta Happonen
Taitto: Paavo Jäppinen

Kopiointikielto

Tämän teoksen osittainenkin kopioiminen on kielletty tekijänoikeuslain (404/61, sellaisena kuin se on viimeksi muutettuna lailla 1654/95) sekä Suomen valtion ja Kopiosto r.y:n tekemän sopimuksen mukaisesti.

Kalvo- ja monistepohjien kopiointi sallitaan.

Painopaikka:
Otavan Kirjapaino Oy
Keuruu 1999

ISBN 951-1-16064-8

Tehtävien ratkaisuja

Lineaarialgebra

Matriisit

1 Matriisi ja vektori

1. a)

	leipä (mk/kg)	peruna (mk/kg)	sokeri (mk/kg)
Suomi	11,60	2,90	7,50
Ruotsi	12,20	2,00	4,50

Vastaava matriisi on $\begin{pmatrix} 11,60 & 2,90 & 7,50 \\ 12,20 & 2,00 & 4,50 \end{pmatrix}$.

b)

	Suomi	Ruotsi
leipä (mk/kg)	11,60	12,20
peruna (mk/kg)	2,90	2,00
sokeri (mk/kg)	7,50	4,50

Vastaava matriisi on $\begin{pmatrix} 11,60 & 12,20 \\ 2,90 & 2,00 \\ 7,50 & 4,50 \end{pmatrix}$.

3 Matriisien yhteenlasku ja vähennyslasku

8. a) $\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, joten $x = 3$ ja $y = -4$.
- b) $\begin{pmatrix} x & 3 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$, joten $x = 8$ ja $y = -6$.
- c) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -1 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3x \\ -2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4+3x \\ -3 & y-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Tällöin $4+3x = -2$ ja $y-7 = 0$, joten $x = -2$ ja $y = 7$.
- d) $\begin{pmatrix} 5 & y \\ -2x & 8 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -22 \\ -21 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 24 & 8 \end{pmatrix}$. Nähdään, että $x = -12$ ja $y = 10$.

9. a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$
 b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
 c) $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & -8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
 d) $4X = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$, joten $X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

10. a) $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ja $B^T = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$
 b) $A^T + B^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -3 & -13 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$
 c) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & -8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 12 & -13 & -8 \end{pmatrix}$, joten
 $(A + B)^T = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -3 & -13 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$.

Kohtien b ja c tulokset ovat samat. Yleisesti pätee, että $(A + B)^T = A^T + B^T$.

4 Matriisien kertolasku

11. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2 & 12+2 \\ -4-6 & -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$
 b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+8 & 4-10 & -6+10 \\ -3+12 & 6-15 & -9+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 4 \\ 9 & -9 & 6 \end{pmatrix}$
 c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-6 & -4+4 & 0+10 \\ 6-9 & 8+6 & 0+15 \\ -6-3 & -8+2 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 10 \\ -3 & 14 & 15 \\ -9 & -6 & 5 \end{pmatrix}$
 d) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+2 & 20-7 \\ -6+49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ -5 & 53 \end{pmatrix}$
 e) $\begin{pmatrix} 10 & -5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-10+3 & 30-10+1 \\ 2-10+3 & 4-10+1 \\ 3-5+3 & 6-5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ -5 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
 f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-4 \\ -10+10 \\ -15+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

14. a) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ 23 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}$, joten $x+3y=5$ ja $2x+4y=8$.

Yhtälöparin ratkaisu on $x=2$ ja $y=1$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ x+6y & -2x-6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, joten $x+6y=-1$ ja $-2x-6y=-4$. Ratkaisuksi saadaan $x=5$ ja $y=-1$.

15.
$$ABC = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2-8 & -9+2+4 \\ 5+8+4 & 15-8-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -13 & -3 \\ 17 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13+9 \\ 17-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

16. Kustannusvektori on $K = (250 \ 120 \ 80)$ ja taulukkoa vastaava vektori

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Niiden tulo on } KM = (250 \ 120 \ 80) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1760 \ 1790 \ 1730).$$

a) Tulon alkiot ilmaisevat kunkin matkavaihtoehdon kokonaiskustannuksen markkoina.

b) Edullisin vaihtoehto on C.

17. $K = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 8 & 2 & 12 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, joten $K^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 12 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$(8 \ 12 \ 5) K^T (25 \ 30 \ 15 \ 12 \ 20)^T$$

$$= (8 \ 12 \ 5) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 12 & 2 & 3 \end{pmatrix} (25 \ 30 \ 15 \ 12 \ 20)^T$$

$$= (91 \ 114 \ 148 \ 82 \ 47) (25 \ 30 \ 15 \ 12 \ 20)^T$$

$$= (9839)$$

Tulo ilmoittaa, että mikäli kaikki tuotteet myydään, saadaan matkaa varten 9 839 mk.

18. a) $AA^T = (-2 \ 3 \ 1 \ 0 \ -5)(-2 \ 3 \ 1 \ 0 \ -5)^T$

$$= (4+9+1+0+25) = (39)$$

b) Jos A on $m \times n$ -matriisi, niin A^T on $n \times m$ -matriisi. Matriisitulon määrittelyehdon mukaan AA^T on määritelty ja kyseinen tulomatriisi on tyyppiä $m \times m$.

20. Olkoon $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ ja $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$. Silloin

$$\begin{aligned} A(B+C) &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 \\ b_3+c_3 & b_4+c_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1b_1+a_1c_1+a_2b_3+a_2c_3 & a_1b_2+a_1c_2+a_2b_4+a_2c_4 \\ a_3b_1+a_3c_1+a_4b_3+a_4c_3 & a_3b_2+a_3c_2+a_4b_4+a_4c_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1c_1+a_2c_3 & a_1c_2+a_2c_4 \\ a_3c_1+a_4c_3 & a_3c_2+a_4c_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \\ &= AB + AC \end{aligned}$$

Osittelulaki $(A+B)C = AC + BC$ voidaan osoittaa oikeaksi vastaavasti.

21. Olkoon $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Silloin $AB = \begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{pmatrix}$, joten $(AB)^T = \begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_3b_1+a_4b_3 \\ a_1b_2+a_2b_4 & a_3b_2+a_4b_4 \end{pmatrix}$. Toisaalta $B^T = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix}$ ja $A^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$, joten $B^T A^T = \begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_3b_1+a_4b_3 \\ a_1b_2+a_2b_4 & a_3b_2+a_4b_4 \end{pmatrix}$. Siis $(AB)^T = B^T A^T$.

5 Matriisin potenssi

27. a) $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, joten $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- b) $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, joten $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Saatujen tulosten perusteella voidaan päätellä, että matriisiyhtälö

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ei ole yleisesti voimassa.

28. Valitaan $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Silloin $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ja

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Toisaalta } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ja } B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ joten}$$

$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Koska tulokset $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ eivät ole samoja, matriisiyhtälö $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ ei ole yleisesti voimassa.

29. Valitaan $p = 2$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \text{ joten } (AB)^2 = \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 40 & 80 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \text{ ja } B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Siis } A^2 B^2 = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 36 & 72 \end{pmatrix}. \text{ Nähdään, että kaava}$$

$(AB)^p = A^p B^p$, $p \in \mathbb{N}$, ei ole yleisesti voimassa.

30. Digraafia vastaava matriisi M on ohessa.

$$\text{Sen neliö on } M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

		Mihin			
		A	B	C	D
Mistä	A	0	1	0	1
	B	1	0	1	0
	C	0	0	0	1
	D	1	0	1	0

a) Koska alkio $a_{32} = 0$, C ei saa yhtään yhteyttä B:hen yhden välittäjähenkilön kautta.

b) Koska $a_{24} = 2$, B saa kahdella eri tavalla yhteyden D:hen yhden välittäjähenkilön kautta.

31. Digraafia vastaava matriisi M on ohessa.

$$\text{Sen neliö on } M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

		Mihin				
		A	B	C	D	E
Mistä	A	0	1	0	0	0
	B	1	0	0	0	1
	C	0	1	0	0	0
	D	1	0	1	0	0
	E	0	1	0	1	0

a) Alkio $a_{53} = 1$, joten E:stä C:hen on yksi yhden välilaskun yhteys.

b) Alkio $a_{42} = 2$, joten D:stä B:hen on kaksi yhden välilaskun yhteyttä.

c) Alkio $a_{45} = 0$, joten D:stä E:hen ei ole yhtään yhden välilaskun yhteyttä.

32.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kysytynlaisia yhteyksiä on

a) kaupungista B kaupunkiin C yksi,

b) kaupungista D kaupunkiin E kaksi,

c) kaupungista C kaupunkiin E ei yhtään,

d) kaupungista E kaupunkiin B neljä.

Kaksi d-kohdan yhteyttä ei ole tarkoituksenmukaista siksi, että kaupunkiin B mentäessä on yksi välilasku tässä kaupungissa.

34. a) Kolmio $A(1, 2)B(4, 1)C(2, 4)$ voidaan esittää matriisina $K = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 90° :n

kierron positiiviseen suuntaan välittää matriisi $R = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$RK = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = K'. \text{ Tuloksena on kolmio}$$

$$A'(-2, 1)B'(-1, 4)C'(-4, 2).$$

$$\text{b) } RK' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} = K''. \text{ Tuloksena on kolmio}$$

$$A''(-1, -2)B''(-4, -1)C''(-2, -4).$$

$$\text{c) } RK'' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} = K'''. \text{ Tuloksena on kolmio}$$

$$A'''(2, -1)B'''(1, -4)C'''(4, -2).$$

- *35. Kolmio $A(2, 1)B(6, 1)C(6, 3)$ voidaan esittää matriisina $K = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 45° :n kierron

positiiviseen suuntaan välittää matriisi $R = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

$$RK = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{9}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,71 & 3,54 & 2,12 \\ 2,12 & 4,95 & 6,36 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kolmio } A'B'C' \text{ kärkipisteet ovat } A' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \approx (0,71; 2,12), B' = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\approx (3,54; 4,95), C' = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}}\right) \approx (2,12; 6,36).$$

6 Käänteismatriisi

39. a) $ad - bc = 6 - 5 = 1 \neq 0$, joten matriisi $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ on säännöllinen. Käänteismatriisi

$$\text{on } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } ad - bc = 0 - 0 = 0, \text{ joten matriisi } \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ei ole säännöllinen.}$$

$$\text{c) } ad - bc = -24 - (-24) = 0, \text{ joten matriisi } \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \text{ ei ole säännöllinen.}$$

$$\text{d) } ad - bc = 20 - 21 = -1 \neq 0, \text{ joten matriisi } \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \text{ on säännöllinen. Käänteismat-}$$

$$\text{riisi on } -1 \cdot \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

40. $ad - bc = \sin^2 \alpha - (-\cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \neq 0$, joten matriisi $\begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}$ on säännöllinen. Käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}$.
41. Matriisi $\begin{pmatrix} x & -2 \\ 3 & 1-x \end{pmatrix}$ on kääntyvä, jos $x(1-x) - 6 \neq 0$ eli $x^2 - x + 6 \neq 0$. Trinomin nollakohdat ovat 3 ja -2, joten matriisi on kääntyvä, kun $x \neq 3$ tai $x \neq -2$.
42. $A^{-1} = \frac{1}{7-6} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
 a) $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-6 & -2+2 \\ 21-21 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
 $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-6 & 14-14 \\ -3+3 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
 b) Koska $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, niin $(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{7-6} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = A$.
44. a) Kun $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, niin $A^{-1} = \frac{1}{0-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^T$, joten A on ortogonaalinen.
 b) Kun $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, niin $A^{-1} = \frac{1}{-1-0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^T$, joten A on ortogonaalinen.
 c) Kun $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, niin $A^{-1} = \frac{1}{4-0} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A^T$, joten A ei ole ortogonaalinen.
45. Kun $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, niin
 $A^{-1} = \frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x} \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = A^T$,
 joten A on ortogonaalinen.
46. $AB = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 4 \\ -13 & 5 & -6 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, joten $(AB)^T = \begin{pmatrix} 3 & -13 & 0 \\ -9 & 5 & 5 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.
- $B^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ja $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, joten $B^T A^T = \begin{pmatrix} 3 & -13 & 0 \\ -9 & 5 & 5 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$. Huomataan, että $(AB)^T = B^T A^T$. Voidaan osoittaa, että tämä sääntö on yleisesti voimassa.

$$47. \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ ja } (A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ ja } (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Huomataan, että $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Voidaan osoittaa, että sääntö on yleisesti voimassa.

7 Determinantti

$$50. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 9 = 81$$

$$\text{b)} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot (-12) = 24$$

$$\text{c)} \quad \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0 \text{ (kaksi identtistä riviä)}$$

$$51. \quad \text{Matriisin determinantti on } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \text{ joten käänteismatriisiä ei ole.}$$

$$52. \quad \text{Matriisilla } A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ on käänteismatriisi, jos } \det A \neq 0.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 1 - 2 - (-2a) - (-a) - (-1) = a^2 + 3a$$

$\det A = 0$, kun $a = 0$ tai $a = -3$. Käänteismatriisi on olemassa, kun $a \neq 0$ tai $a \neq -3$.

$$53. \quad \text{Kun sarakekäsittely tehdään, tuloksena on matriisi } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 8 \end{vmatrix}. \text{ Kehitetään se}$$

ensimmäisen vaakarivin suhteen, jolloin saadaan

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 9 \\ -1 & 8 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 192 + 40 + 9 - 288 + 6 + 40 = -1.$$

$$54. \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 7\bar{i} - 15\bar{j} - \bar{k}$$

55. Ratkaistaan yhtälöryhmä yhteenlaskukeinolla.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \quad \begin{matrix} \cdot e \\ \cdot (-b) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cdot (-d) \\ \cdot a \end{matrix}$$

$$\begin{cases} aex + bey = ce \\ -bdx - bey = -bf \end{cases}$$

$$(ae - bd)x = ce - bf$$

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} -adx - bdy = -cd \\ +adx + aey = af \end{cases}$$

$$(ae - bd)y = af - cd$$

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

56. Olkoon $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Silloin $AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$ ja

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) \\ &= adeh + bcfg - adfg - bceh. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} \det A \cdot \det B &= (ad - bc)(eh - fg) \\ &= adeh - adfg - bceh + bcfg. \end{aligned}$$

Huomataan, että $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

*57. Determinantti $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ ilmoittaa vektoreiden

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k} \text{ ja } \bar{c} = c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}$$

määräämisen suuntaissärmiön tilavuuden tai tilavuuden vastaluvun.

Lineaariset yhtälöryhmät

1 Ratkaisun olemassaolo

61. a) Yhtälöryhmän
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = 1 \\ 3z = 2 \end{cases}$$
 alimmasta yhtälöstä ratkeaa z ja sitten takautuvilla

sijoituksilla y ja x . Saadaan $x = 1\frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{2}{3}$.

b)
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + y + z = 6 \\ x + y + 3z = 10 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \cdot 3$$
 Saadaan $\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 4x + 4y = 16 \end{cases}$ eli $x + y = 4$. Silloin $z = 2$, ja

toinen tuntemattomista x ja y voidaan valita vapaasti. Yhtälöryhmän ratkaisu on $x \in \mathbf{R}, y = 4 - x, z = 2$.

c)
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x - y - 2z = 8 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array} \cdot 1$$
 Saadaan $\begin{cases} 5x - 7y = 20 \\ 3x - 3y = 12 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \cdot 7 \end{array}$ ja edelleen $6x = 24$. Rat-

kaisu on $x = 4, y = 0, z = -2$.

d)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -y - 3z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ \cdot 3 \end{array}$$
 Saadaan $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ Yhtälöt ovat ristiriitaiset, joten

annetulla yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

62. a)
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + y + z = 5 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \cdot (-1) \cdot 3$$
 Saadaan $\begin{cases} 4x + 3z = 6 \\ 4y + z = 14 \end{cases}$ ja edelleen $\begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}z \\ y = \frac{7}{2} - \frac{1}{4}z \end{cases}$ Ratkai-

su on $x = 1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z, y = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z, z \in \mathbf{R}$.

b)
$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x + y + 2z = 5 \\ 2x + 4z = 10 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \end{array}$$
 Saadaan $\begin{cases} 2x + 4z = 10 \\ 2x + 4z = 10 \end{cases}$ eli $x + 2z = 5$. Keskimmäisestä

yhtälöstä päätellään, että tällöin $y = 0$. Ratkaisu on $x = 5 - 2z, y = 0, z \in \mathbf{R}$.

c)
$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -6x + 3y - 3z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{array}$$
 Saadaan $0 = 10$. Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.

d)
$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}$$
 Saadaan $4x = 0$. Ratkaisu on $x = 0, y = z, z \in \mathbf{R}$.

63. a) $\begin{cases} -x + 2y = a \\ 2x - 4y = 5 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{matrix}$ Saadaan $0 = 2a + 5$. Yhtälöparilla ei ole ratkaisuja, jos $a \neq -2\frac{1}{2}$.

b) $\begin{cases} 3x + ay = 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot (-3) \end{matrix}$ Saadaan $(a + 3)y = -1$. Yhtälöparilla ei ole ratkaisuja, jos $a = -3$.

64. a) $\begin{cases} 4x + ay = 2 \\ ax + y = 1 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot (-a), a \neq 0 \end{matrix}$ Saadaan $(4 - a^2)x = 2 - a$. Jos $a \neq \pm 2$, tulee tarkalleen yksi ratkaisu $x = \frac{1}{a+2}$, $y = 1 - ax$. Tapauksessa $a = 0$ saadaan myös tarkalleen yksi ratkaisu $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$.

b) Edellisen kohdan perusteella yhtälöryhmällä ei ole yhtään ratkaisua, jos $a = -2$.

c) Tapauksessa $a = 2$ saadaan yhtälö $0 \cdot x = 0$. Tällä a :n arvolla ratkaisuja on siis äärettömän monta.

65. Olkoon kolmion muotoisia levyjä x , neliön muotoisia levyjä y ja viisikulmion muotoisia levyjä z kappaletta. Lukumääristä saadaan yhtälöt $x + y + z = 80$ ja $x - y = 10$ ja si-
vujen määrästä yhtälö $3x + 4y + 5z = 290$. Yhtälöryhmän $\begin{cases} x + y + z = 80 \\ x - y = 10 \\ 3x + 4y + 5z = 290 \end{cases}$ ratkaisu

on $x = 40$, $y = 30$, $z = 10$.

Vastaus: kolmion muotoisia 40, neliön muotoisia 30 ja viisikulmion muotoisia 10 kpl

66. Olkoon pituus x cm, leveys y cm ja korkeus z cm. Annetut ehdot johtavat yhtälöryhmään $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x + y + z = 35 \end{cases}$ Sen ratkaisu on $x = 20$, $y = 10$, $z = 5$.

Vastaus: pituus 20 cm, leveys 10 cm ja korkeus 5 cm

2 Yhtälöryhmän matriisimuoto

68. Matriisin $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi on $\frac{1}{-8 - (-9)} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix}$. Ratkaisu on $x = 13$, $y = 10$.

$$\text{b) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu on $x = 3, y = 2$.

$$\text{c) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu on $x = 70, y = 50$.

$$69. \text{ a) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu on $x = 1, y = -2, z = 2$.

$$\text{b) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu on $x = 5, y = 10, z = -15$.

$$\text{c) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu on $x = 0, y = 2, z = -3$.

$$70. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ joten } \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ei ole ratkaisu.}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 4 & 15 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ joten } \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ on ratkaisu.}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ joten } \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ on ratkaisu.}$$

3 Gaussin eliminointimenetelmä

$$72. \text{ a) } \left\{ \begin{array}{l} x - 4y - 3z = 6 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ -3x + 2y + 2z = -1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x - 4y - 3z = 6 \\ 9y + 3z = -12 \\ -10y - 7z = 17 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \cdot 10 \\ \cdot 9 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 4y - 3z = 6 \\ 9y + 3z = -12 \\ -33z = 33 \end{array} \right.$$

Ratkaistaan z ja takautuvilla sijoituksilla x ja y . Ratkaisu on $x = -1, y = -1, z = -1$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y - 2z = -1 \\ 2x + y - z = 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-3) \\ \cdot (-3) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ 7y + 5z = 4 \\ -y + z = -1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ \cdot 7 \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 7y + 5z = 4 \\ 12z = -3 \end{cases}$$

Ratkaistaan z ja takautuvilla sijoituksilla x ja y . Ratkaisu on $x = 0, y = \frac{3}{4}, z = -\frac{1}{4}$.

$$73. \quad a) \quad \begin{cases} x + y + z + u = 14 \\ 2x + 3y - 4z + 5u = 20 \\ 3x - 2y - 5z + 2u = -4 \\ 5x + 4y - 2z - 5u = 25 \end{cases} \begin{array}{c} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \\ \cdot(-3) \\ \cdot 1 \end{array} \begin{array}{c} \cdot(-3) \\ \cdot 1 \\ \cdot(-5) \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z + u = 14 \\ y - 6z + 3u = -8 \\ -5y - 8z - u = -46 \\ -y - 7z - 10u = -45 \end{cases} \begin{array}{c} \cdot 5 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z + u = 14 \\ y - 6z + 3u = -8 \\ -38z + 14u = -86 \\ -13z - 7u = -53 \end{cases} \begin{array}{c} \cdot 13 \\ \cdot(-38) \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z + u = 14 \\ y - 6z + 3u = -8 \\ -38z + 14u = -86 \\ -13z - 7u = -53 \end{cases} \begin{array}{c} \cdot 13 \\ \cdot(-38) \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z + u = 14 \\ y - 6z + 3u = -8 \\ -38z + 14u = -86 \\ 448u = 896 \end{cases}$$

Ratkaistaan u ja takautuvilla sijoituksilla x, y ja z . Ratkaisu on $x = 5, y = 4, z = 3, u = 2$.

$$b) \quad \begin{cases} 3x - y + z + 3u = 13 \\ 20y - 2z + u = 7 \\ x - 9y - z - u = 1 \\ 5z + 3u = -1 \end{cases} \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot(-3) \end{array} \quad \begin{cases} 3x - y + z + 3u = 13 \\ 20y - 2z + u = 7 \\ 27y + 4z + 6u = 10 \\ 5z + 3u = -1 \end{cases} \begin{array}{c} \cdot 27 \\ \cdot(-20) \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x - y + z + 3u = 13 \\ 20y - 2z + u = 7 \\ -134z - 93u = -11 \\ 5z + 3u = -1 \end{cases} \begin{array}{c} \cdot 5 \\ \cdot 134 \end{array} \quad \begin{cases} 3x - y + z + 3u = 13 \\ 20y - 2z + u = 7 \\ -134z - 93u = -11 \\ -63u = -189 \end{cases}$$

Ratkaistaan u ja takautuvilla sijoituksilla x, y ja z . Ratkaisu on $x = 2, y = 0, z = -2, u = 3$.

74. a) Vaihdetaan ensimmäisen ja toisen yhtälön paikat.

$$\begin{cases} x & -z = 2 \\ & y - z = 1 \\ 2x - 3y & = 5 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ \cdot (-1) \end{matrix} \quad \begin{cases} x & -z = 2 \\ & y - z = 1 \\ 3y - 2z & = -1 \end{cases} \begin{matrix} \\ \cdot (-3) \\ \cdot 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x & -z = 2 \\ & y - z = 1 \\ & z = -4 \end{cases}$$

Ratkaisu on $x = -2, y = -3, z = -4$.

b) Vaihdetaan ensimmäisen ja viimeisen yhtälön paikat.

$$\begin{cases} x + y & = -1 \\ & 2y - z + 2u = -5 \\ 2x + 3y + z & = -1 \\ & 4z - u = 11 \end{cases} \begin{matrix} \cdot (-2) \\ \\ \cdot 1 \\ \end{matrix} \quad \begin{cases} x + y & = -1 \\ & 2y - z + 2u = -5 \\ & y + z = 1 \\ & 4z - u = 11 \end{cases} \begin{matrix} \\ \cdot 1 \\ \cdot (-2) \\ \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + y & = -1 \\ & 2y - z + 2u = -5 \\ & -3z + 2u = -7 \\ & 4z - u = 11 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 4 \\ \cdot 3 \end{matrix} \quad \begin{cases} x + y & = -1 \\ & 2y - z + 2u = -5 \\ & -3z + 2u = -7 \\ & 5u = 5 \end{cases}$$

Ratkaistaan u ja takautuvilla sijoituksilla x, y ja z . Ratkaisu on $x = 1, y = -2, z = 3, u = 1$.

75. a)
$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 5y + 2z = 1 \end{cases} \begin{matrix} \cdot (-2) \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{matrix} \cdot (-3) \quad \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -y - z = -1 \\ -y - z = -8 \end{cases}$$

Toinen ja kolmas yhtälö ovat ristiriitaiset, joten annetulla yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

b)
$$\begin{cases} -x + 2y + 2z + 2u = 10 \\ & y + 3z + u = 5 \\ 3x - 2y + z - 2u = 0 \\ 2x - y + z - u = -1 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{matrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{cases} -x + 2y + 2z + 2u = 10 \\ & y + 3z + u = 5 \\ 4y + 7z + 4u = 30 \\ 3y + 5z + 3u = 19 \end{cases} \begin{matrix} \cdot (-4) \\ \cdot (-3) \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z + 2u = 10 \\ & y + 3z + u = 5 \\ & -5z = 10 \\ & -4z = 4 \end{cases}$$

Kaksi viimeistä yhtälöä ovat ristiriitaiset, joten annetulla yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

76. a)
$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + 3z = 5 \\ x - 2y + z = 3 \end{cases} \begin{matrix} \cdot (-2) \\ \cdot 1 \\ \\ \cdot (-1) \end{matrix} \begin{matrix} \cdot (-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \cdot 1 \quad \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + z = 1 \\ y + 5z = 5 \\ -2z = -3 \end{cases} \begin{matrix} \\ \cdot 1 \\ \cdot (-5) \\ \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + z = 1 \\ -24z = -24 \\ -2z = -3 \end{cases}$$

Kaksi viimeistä yhtälöä ovat ristiriitaiset, joten annetulla yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ x + z = 6 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-1) \end{array} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ -y + z = -2 \end{cases}$$

Valitaan $z \in \mathbb{R}$ mielivaltaisesti. Silloin $y = z + 2$ ja $x = -z + 6$.

$$77. \quad \text{Merkitään } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \text{ Yhtälö } AX = B \text{ esittää silloin yhtälöryhmää } \begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 4x + 6y + 2z = 24 \\ 3x + 7y + 12z = 30. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 4x + 6y + 2z = 24 \\ 3x + 7y + 12z = 30 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-4) \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \\ \cdot 1 \end{array} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ -2y - 10z = -12 \\ y + 3z = 3 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ -2y - 10z = -24 \\ -4z = -6 \end{cases}$$

Ratkaistaan z ja takautuvilla sijoituksilla x ja y . Ratkaisu on $x = 7,5; y = -1,5; z = 1,5$.

$$78. \quad \text{a)} \quad \text{Sijoitetaan annettujen pisteiden koordinaatit yhtälöön } y = ax^2 + bx + c, \text{ jolloin muodostuu yhtälöryhmä } \begin{cases} a + b + c = 9 \\ 9a + 3b + c = -1 \\ a - b + c = -21. \end{cases} \text{ Sen ratkaisu on } a = -5, b = 15, c = -1. \text{ Paraabelin yhtälö on } y = -5x^2 + 15x - 1.$$

Yhtälöön $x = ay^2 + by + c$ sijoittamalla saadaan vastaavasti yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 81a + 9b + c = 1 \\ a - b + c = 3 \\ 441a - 21b + c = -1. \end{cases} \text{ Sen ratkaisu on } a = -\frac{1}{75}, b = -\frac{7}{75} \text{ ja } c = 2\frac{23}{25}, \text{ joten paraabelin yhtälöksi sopii myös } x = -\frac{1}{75}y^2 - \frac{7}{75}y + 2\frac{23}{25}.$$

$$\text{b)} \quad \text{Sijoitetaan annettujen pisteiden koordinaatit yhtälöön } x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \text{ jolloin muodostuu yhtälöryhmä } \begin{cases} a + 9b + c = -82 \\ 3a - b + c = -10 \\ -a - 21b + c = -442. \end{cases} \text{ Sen ratkaisu on } a = 72, b = 7\frac{1}{5}, c = -218\frac{4}{5}. \text{ Ympyrän yhtälö on } x^2 + y^2 + 72x + 7\frac{1}{5}y - 218\frac{4}{5} = 0.$$

4 Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmä

79. a)
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{cases} 6x = 2 \\ -3y = -7 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{6} \\ \cdot (-\frac{1}{3}) \end{array}$$

b)
$$\begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 3y + 2z = -8 \\ 4z = 8 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ 3y = -12 \\ z = 2 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \cdot 1 \\ \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \\ z = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 7y - z = 10 \\ -x + y - 2z = 11 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \cdot 3 \\ \cdot 1 \\ \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 7y - z = 10 \\ 8y - 3z = 21 \\ -25z = 175 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot (-\frac{1}{25}) \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 7y = 3 \\ 8y = 0 \\ z = -7 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 8 \\ \cdot (-7) \\ \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = -7 \end{cases}$$

80. a)
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + 5y = 4 \\ -2x - 7y = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-3) \cdot 2 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 11y = -11 \\ -11y = 11 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{1}{11} \\ \cdot (-\frac{1}{11}) \end{array}$$

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ y=-1 \\ y=-1 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 2 \\ \end{array}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x+y-3z=3 \\ x+3y-5z=1 \\ 6x-2y+z=9 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-2) \\ \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x+y-3z=3 \\ -5y+7z=1 \\ 5y-10z=0 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x+y-3z=3 \\ -5y+7z=1 \\ -3z=1 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 3 \\ \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ -15y=10 \\ -3z=1 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 15 \\ \cdot 1 \\ \end{array}$$

$$\begin{cases} 30x=40 \\ -15y=10 \\ -3z=1 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{30} \\ \cdot (-\frac{1}{15}) \\ \cdot (-\frac{1}{3}) \end{array}$$

$$\begin{cases} x=1\frac{1}{3} \\ y=-\frac{2}{3} \\ z=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x-y+2z=2 \\ 2x+3y-z=-1 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x-y+2z=2 \\ 5y-5z=-5 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{1}{5} \end{array}$$

$$\begin{cases} x-y+2z=2 \\ y-z=-1 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y-z=-1 \end{cases}$$

Tuntemattomalle z voidaan valita mielivaltainen arvo, jolloin $y = z - 1$ ja $x = -z + 1$.

81. a) Vaihdetään ensimmäisen ja kolmannen yhtälön paikat.

$$\begin{cases} 3x+z=5 \\ x-3y+2z=-12 \\ 2y+3z=5 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-3) \\ \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x+z=5 \\ 9y-5z=41 \\ 2y+3z=5 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \cdot (-9) \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x+z=5 \\ 9y-5z=41 \\ -37z=37 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot (-\frac{1}{37}) \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x+z=5 \\ 9y-5z=41 \\ z=-1 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 5 \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x=6 \\ 9y=36 \\ z=-1 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{3} \\ \cdot \frac{1}{9} \\ \end{array}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=-1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x+y-z-u=6 \\ y+z-u=2 \\ -x-y+2z+2u=-9 \\ 2z+u=-4 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \\ \cdot 1 \\ \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y-z-u=6 \\ y+z-u=2 \\ z+u=-3 \\ 2z+u=-4 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot (-2) \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y-z-u=6 \\ y+z-u=2 \\ z+u=-3 \\ -u=2 \end{cases} \begin{array}{l} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \end{array} \quad \begin{cases} x+y-z=4 \\ y+z=0 \\ z=-1 \\ -u=2 \end{cases} \begin{array}{l} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot (-1) \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y=1 \\ z=-1 \\ -u=2 \end{cases} \begin{array}{l} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-1) \\ \\ \end{array} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \\ -u=2 \end{cases} \begin{array}{l} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot (-1) \\ \end{array}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \\ u=-2 \end{cases}$$

82. a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{12}(-3)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{21}(1)}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -9 \\ 0 & -2 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{M_2(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Ratkaisu on $x = -9, y = 7$.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{M_2(-2), A_{12}(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{21}(1)}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -12 \\ 0 & -1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{M_1(\frac{1}{2}), M_2(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Ratkaisu on $x = -6, y = 7$.

c) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{M_2(-3), A_{12}(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{M_2(-\frac{1}{5})}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{21}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{M_1(\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ratkaisu on $x = -2, y = 3$.

83. a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{32}(-1), A_{31}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Ratkaisu on $x = 4, y = -2, z = 3$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) &\xrightarrow{P_{13}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{23}(-1)} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{31}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ratkaisu on $x = 5, y = 3, z = -1$.

$$\text{c)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{13}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{23}(1), A_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Nollarivi merkitsee identtistä yhtälöä. Keskimäinen rivi antaa $y = -2$. Ylin rivi vastaa yhtälöä $x + z = 4$. Ratkaisu on $x = 4 - z, y = -2, z \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} 84. \quad \text{a)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) &\xrightarrow{A_{12}(-4), A_{13}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \right) \xrightarrow{M_2(-\frac{1}{3}), A_{23}(5)} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{32}(2), A_{31}(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{M_3(-1), A_{21}(-2)} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ratkaisu on $x = 4, y = -2, z = 3$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{A_{12}(-1), A_{13}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{23}(-3)} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{21}(1), M_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ratkaisu on $x = 1 + 2z, y = 2 + 3z, z \in \mathbf{R}$.

$$\text{c)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{12}(-1), A_{13}(-2), A_{14}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -7 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{23}(1), A_{24}(-5)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -22 \end{array}\right)$$

Kolmatta riviä vastaava yhtälö on identtisesti epätosi, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

85. a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{12}(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{21}(-3)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

Käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{12}(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{21}(5)} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{M_1(\frac{1}{2}), M_2(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2,5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

Käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} 3 & 2,5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{32}(2), A_{31}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{21}(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{12}(1), A_{13}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{23}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{23}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

e) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{12}(3), A_{13}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{23}(-2)}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{32}(-1), A_{31}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 9 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{21}(1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 20 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} 20 & 5 & -2 \\ 11 & 3 & -1 \\ -8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

f) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{P_{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{12}(-1)}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{32}(3), A_{31}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_1(\frac{1}{2}), M_2(\frac{1}{2}), M_3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0,5 & -1,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0,5 & 1,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} 0,5 & -1,5 & 0 \\ -0,5 & 1,5 & 0,5 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

86. a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{P_{12}, P_{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Käänteismatriisi on $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{P_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{12}(1), A_{13}(-2)}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{23}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Viimeisestä rivistä nähdään identtisesti epätosi yhtälö, joten annetulla matriisilla ei ole käänteismatriisiä.

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{M_2(-1), R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{12}(-3), A_{13}(-4)} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{M_3(2), A_{23}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Viimeisestä rivistä nähdään identtisesti epätosi yhtälö, joten annetulla matriisilla ei ole käänteismatriisia.

$$87. \quad \text{a)} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{12}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{M_2(\frac{1}{5}), A_{21}(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ratkaisu on $x = 0, y = 0$.

$$\text{b)} \quad \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{12}(3)} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ratkaisu on $x \in \mathbf{R}, y = 2x$.

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{12}(-3), A_{13}(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{M_2(\frac{1}{11}), A_{23}(1)} \\
 & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{21}(3)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Ratkaisu on $x = 0, y = 0$.

$$88. \quad \text{a)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{12}(-1), A_{13}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{23}(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{32}(-3), A_{31}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{M_2(\frac{1}{5}), A_{21}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ratkaisu on $x = 0, y = 0, z = 0$.

$$\text{b)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{12}(-1), A_{13}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{23}(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{M_1(5), A_{21}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{M_2(\frac{1}{5}), M_1(\frac{1}{5})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ratkaisu on $x = -\frac{1}{5}z$, $y = -\frac{3}{5}z$, $z \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) &\xrightarrow{A_{12}(-1), A_{13}(-2), A_{14}(-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{M_4(\frac{1}{2}), A_{23}(-1), A_{24}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{M_2(\frac{1}{5}), A_{21}(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Ratkaisu on $x = -\frac{1}{5}z + \frac{1}{5}u$, $y = -\frac{3}{5}z - \frac{2}{5}u$, $z \in \mathbf{R}$, $u \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \text{d) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) &\xrightarrow{A_{12}(-1), A_{13}(-1), A_{14}(-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{M_3(5), A_{23}(-3), A_{24}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{43}(1), A_{42}(-2), A_{41}(1)} \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{32}(-3), A_{31}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{M_2(\frac{1}{5}), A_{21}(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Ratkaisu on $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 0$.

$$\text{*89. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow{A_{12}(-1), A_{13}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 & b-2 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{23}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & b-4 \end{array}\right)$$

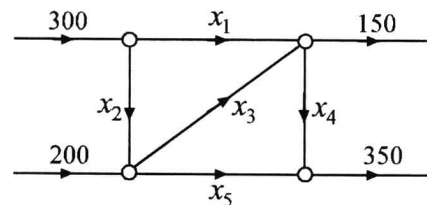
Jos nyt $a = 5$ ja $b = 4$, ratkaisuja on äärettömän monta, sillä viimeinen yhtälö on tällöin muotoa $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$. Jos taas $a = 5$ ja $b \neq 4$, yhtälöryhmällä ei ole ratkai-

suja. Oletetaan, että $a \neq 5$. Silloin matriisin $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$ determinantti eroaa nollassa.

ta, joten matriisilla on käänteismatriisi ja yhtälöryhmällä näin ollen yksikäsitteinen ratkaisu.

Vastaus: a) $a = 5$ ja $b \neq 4$, b) $a = 5$ ja $b = 4$, c) $a \neq 5$

- *90. Liikennevirtoja esittää oheinen kaavio.
(Calculus 11:n ensimmäisessä painoksessa tuntematonta x_4 vastaavan nuolen suunta on virheellinen.)



Liikennevirroista saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 150 \\ x_2 + 200 = x_3 + x_5 \\ x_4 + x_5 = 350 \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 300 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 150 \\ x_2 - x_3 - x_5 = -200 \\ x_4 + x_5 = 350. \end{cases}$$

Laajennettu kerroinmatriisi on siis $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 350 \end{array} \right).$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 350 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{12}(-1), M_2(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 350 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{A_{23}(-1), M_3(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 350 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 350 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{34}(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 350 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{A_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 350 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 500 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 350 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Huomataan, että yksikäsitteistä ratkaisua ei ole, vaan esimerkiksi x_5 ja x_3 voidaan valita mielivaltaisesti, jolloin ratkaisu on $x_1 = 500 - x_3 - x_5$, $x_2 = x_3 + x_5 - 200$, $x_3 \in \mathbf{R}$, $x_4 = 350 - x_5$, $x_5 \in \mathbf{R}$.

Lineaariavaruus

1 Lineaariavaruuden määritelmä

91. $V = \{0, 1, 2\}$ ei ole lineaariavaruus, koska esimerkiksi summa $1 + 2 = 3$ ei ole V :n alkio.

92. $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) = (x + u, 2x + 1 + 2u + 1) = (x + u, 2(x + u) + 1 + 1)$ Huomataan, että summa ei ole V :n alkio, joten V ei ole lineaariavaruus.

93. Summa $0 + 0 = 0$ on V :n alkio, samoin tulo $a \cdot 0 = 0$, $a \in \mathbf{R}$. Tutkitaan laskusäännöt.

1. $0 + 0 = 0 + 0$

2. $(0 + 0) + 0 = 0 + (0 + 0)$

3. 0 on nolla-alkio, ja se on V :n alkio.

4. -0 on vasta-alkio, ja se on V :n alkio.

5. $a(0 + 0) = 0$ ja $a \cdot 0 + a \cdot 0 = 0$, joten $a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, $a \in \mathbf{R}$.

6. $(a + b) \cdot 0 = 0$ ja $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$, joten $(a + b) \cdot 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$, $a, b \in \mathbf{R}$.

7. $a(b \cdot 0) = 0$ ja $(ab) \cdot 0 = 0$, joten $a(b \cdot 0) = (ab) \cdot 0$.

8. $1 \cdot 0 = 0$

Koska lineaariavaruuden määritelmän kaikki ehdot toteutuvat, V on lineaariavaruus.

94. Esimerkiksi ehto $1X = X$ ei toteudu, sillä $1 \cdot (x, y) = (1 \cdot y, 1 \cdot x) = (y, x)$ ei ole voimassa kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$.

95. Valitaan $f(x) = x$ ja $g(x) = x^2$. Silloin f ja g ovat V :n alkioita. Summafunktio $(f + g)(x) = x + x^2$ ei kuitenkaan on V :n alkio, sillä $(f + g)(1) = 1 + 1 = 2$ eikä kuvaa näin ollen kulje pisteen $(1, 1)$ kautta. V ei siis ole lineaariavaruus.

96. $V = \{\text{polynomit } P(x) \mid \text{asteluku} \leq 2\}$. Olkoon $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $Q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ ja $R(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$. Summa

$$P(x) + Q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

on aina V :n alkio. Samoin on tulo $aP(x) = aa_2x^2 + aa_1x + aa_0$, $a \in \mathbf{R}$. Tutkitaan laskusäännöt.

1. $P(x) + Q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$
 $= (b_2 + a_2)x^2 + (b_1 + a_1)x + (b_0 + a_0)$
 $= Q(x) + P(x)$
2. $(P(x) + Q(x)) + R(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) + c_2x^2 + c_1x + c_0$
 $= (a_2 + b_2 + c_2)x^2 + (a_1 + b_1 + c_1)x + (a_0 + b_0 + c_0)$
 $= a_2x^2 + a_1x + a_0 + ((b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + (b_0 + c_0))$
 $= P(x) + (Q(x) + R(x))$
3. Nolla-alkio on $O(x) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$, ja se on V :n alkio.
4. $P(x)$:n vasta-alkio on $-P(x) = -a_2x^2 - a_1x - a_0$, ja se on V :n alkio.
5. $a(P(x) + Q(x)) = a((a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0))$
 $= aa_2x^2 + aa_1x + aa_0 + ab_2x^2 + ab_1x + ab_0$
 $= aP(x) + aQ(x)$
6. $(a + b)P(x) = (a + b)a_2x^2 + (a + b)a_1x + (a + b)a_0$
 $= aa_2x^2 + aa_1x + aa_0 + ba_2x^2 + ba_1x + ba_0$
 $= aP(x) + bP(x), a, b \in \mathbf{R}$
7. $a(bP(x)) = a(ba_2x^2 + ba_1x + ba_0)$
 $= aba_2x^2 + aba_1x + aba_0$
 $= abP(x)$
8. $1 \cdot P(x) = 1 \cdot a_2x^2 + 1 \cdot a_1x + 1 \cdot a_0 = P(x)$

Koska lineaariavaruuden määritelmän kaikki ehdot toteutuvat, V on lineaariavaruus.

97. $V = \mathbf{R}^{2 \times 2} = \{2 \times 2\text{-matriisit}\}$. Kahden 2×2 -matriisin summa ja tulo ovat myös 2×2 -matriiseja, joten ne kuuluvat avaruuteen V . Laskusäännöt 1 - 8 ovat seurauksia matriisien laskusäännöistä.

98. a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, josta saadaan yhtälöryhmä $\begin{cases} -a + b = 1 \\ a - b = -1 \\ 2a = 4. \end{cases}$ Sen ratkaisu on $a = 2$ ja $b = 3$, joten $X = 2Y + 3Z$.

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, josta saadaan yhtälöryhmä $\begin{cases} -a + b = 1 \\ a - b = -1 \\ 2a + b = 4. \end{cases}$ Sen ratkaisu on $a = 1$ ja $b = 2$, joten $X = Y + 2Z$.

2 Määritelmän seurauksia

99. $aO = a(O + O) = aO + aO$, josta $aO = aO - aO = aO + (-aO) = O$.
100. Oletetaan, että $a = 0$. Koska $0X = (0 + 0)X = 0X + 0X$, niin $0X = 0X - 0X = O$. Oletetaan nyt, että $X = O$. Koska $aO + aO = a(O + O) = aO$, niin $aO = aO - aO = O$.
101. Yhtälöstä $X + Z = Y + Z$ saadaan liitântälakia soveltamalla $X = (Y + Z) - Z = Y + (Z - Z) = Y + O = Y$.
102. Jos $aX = aY$, niin $aX + O = aY$, jolloin $O = aY - aX = a(Y - X)$. Koska $a \neq 0$, niin $Y - X = O$, josta $Y = O + X = X$.
103. $(-a)(-X) = (-a)((-1)X) = ((-a)(-1))X = aX$.
104. $2(Z + Y) + Z - (Y + 2X) = 3Y$
 $-(Y + 2X) = 3Y - 2(Z + Y) - Z$
 $-Y - 2X = 3Y - 2Z - 2Y - Z$
 $-2X = -3Z + 2Y$
 $X = \frac{3}{2}Z - Y$

3 Aliavaruus

105. a) Jos $X = (x_1, y_1) \in U$ ja $Y = (x_2, y_2) \in U$, niin $y_1 = 5x_1$ ja $y_2 = 5x_2$. Tästä syystä summa $X + Y = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, 5(x_1 + x_2)) \in U$. Jos $a \in \mathbf{R}$ ja $X = (x, y) \in U$, niin $aX = (ax, ay) = (ax, 5ax) \in U$. Koska sekä $X + Y$ että aX kuuluvat U :hun, U on avaruuden V aliavaruus.
- b) Jos $X = (x_1, y_1) \in U$ ja $Y = (x_2, y_2) \in U$, niin $y_1 = 5x_1 - 1$ ja $y_2 = 5x_2 - 1$. Silloin $X + Y = (x_1 + x_2, 5x_1 - 1 + 5x_2 - 1) = (x_1 + x_2, 5(x_1 + x_2) - 2) \notin U$. Tästä syystä U ei ole V :n aliavaruus.
106. Jos $a \in \mathbf{R}$ ja $X = (x, y, z) \in U$, niin $aX = (ax, ay, az)$. Esimerkiksi arvolla $a = 0$ saatu alkio $(0, 0, 0)$ ei ole U :n alkio, koska ehto $5x + y - 1 = 0$ ei toteudu. Näin ollen U ei ole V :n aliavaruus.
- Joukko U esittää xyz -koordinaatistossa z -akselin suuntaista tasoa, joka leikkaa xy -tason pitkin suoraa $5x + y - 1 = 0$.

107. Jos $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ ja $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, niin

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -c_1 - c_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(c_1 + c_2) \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in U.$$

$$\text{Jos } r \in \mathbf{R} \text{ ja } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U, \text{ niin } rA = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & r(-c) \\ rc & rd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & -(rc) \\ rc & rd \end{pmatrix} \in U.$$

Näistä seuraa, että U on avaruuden V aliavaruus.

108. a) Jos $a \in \mathbf{R}$ ja $X = (x, y, z, u) = (x, 2 - x, z, u) \in U$, niin $aX = (ax, 2a - ax, az, au)$. Jos $a \neq 1$, niin $ax + (2a - ax) \neq 2$ eli $aX \notin U$. Näin ollen U ei ole V :n aliavaruus.

b) Jos $X = (x_1, y_1, z_1, u_1) \in U$ ja $Y = (x_2, y_2, z_2, u_2) \in U$, niin

$$\begin{aligned} X + Y &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2)) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)) \in U. \end{aligned}$$

Jos $a \in \mathbf{R}$ ja $X = (x, y, z, u) = (x, y, z, x + y + z) \in U$, niin

$$aX = (ax, ay, az, ax + ay + az) \in U.$$

Näistä seuraa, että U on avaruuden V aliavaruus.

109. Olkoon $U = \{a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}\}$. Jos

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n \in U \text{ ja } Y = b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n \in U, \text{ niin}$$

$$X + Y = (a_1 + b_1)X_1 + (a_2 + b_2)X_2 + \dots + (a_n + b_n)X_n \in U. \text{ Jos } a \in \mathbf{R}, \text{ niin}$$

$$aX = aa_1X_1 + aa_2X_2 + \dots + aa_nX_n \in U. \text{ Näistä seuraa, että } U \text{ on avaruuden}$$

V aliavaruus.

4 Lineaarinen riippuvuus

110. Ehtoa $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vastaava yhtälöpari $\begin{cases} a + 0 \cdot b = 0 \\ 0 \cdot a + b = 0 \end{cases}$ toteutuu vain, kun

$$a = b = 0, \text{ joten vektorit } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ovat lineaarisesti riippumattomia.}$$

111. Ehtoa $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vastaava yhtälöryhmä $\begin{cases} a + 0 \cdot b + 0 \cdot c = 0 \\ 0 \cdot a + b + 0 \cdot c = 0 \\ 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 0 \end{cases}$ toteutuu

vain, kun $a = b = c = 0$. Siksi annetut vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

112. a) Ehto $a \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eli $\begin{cases} a + 5b = 0 \\ 5a + 5b = 0 \end{cases}$ toteutuu vain, kun $a = b = 0$, joten vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

b) Ehto $a \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eli $\begin{cases} -6a + 2b = 0 \\ 9a - 3b = 0 \end{cases}$ toteutuu aina, kun $a \in \mathbf{R}$ ja $b = 3a$, joten annetut vektorit ovat lineaarisesti riippuvia.

Toisin:

Huomataan, että $\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, joten annetut vektorit ovat lineaarisesti riippuvia.

113. a) Yhtälöä $a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vastaa yhtälöryhmä $\begin{cases} 2a + 3b + c = 0 \\ a - 2b - 3c = 0 \\ 3a + b - 2c = 0, \end{cases}$ jonka

kerroindeterminantti $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Yhtälöryhmällä on siis äärettömän monta rat-

kaisua, ja näin ollen annetut vektorit ovat lineaarisesti riippuvia.

Toisin:

Ehto $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ johtaa yhtälöryhmään $\begin{cases} 3a + b = 2 \\ -2a - 3b = 1 \\ a - 2b = 3. \end{cases}$ Sen ratkaisu on

$a = 1, b = -1$. Siis vektorit ovat lineaarisesti riippuvia.

b) Kuten a-kohdassa saadaan $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Vastaavalla homogeenisella yhtälö-

ryhmällä on siis yksikäsitteinen ratkaisu $a = b = c = 0$, joten annetut vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Toisin: Laskemalla voidaan todeta, ettei mikään annetuista vektoreista ole muiden lineaarikombinaatio

114. a) Ehto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ johtaa yhtälöryhmään $\begin{cases} 3b + 3c = 1 \\ 2a - 4b + 2c = 0 \\ 5b + c = 1, \end{cases}$ jolla on

ratkaisu $a = b = c = \frac{1}{6}$. Siis vektorit ovat lineaarisesti riippuvia.

b) Merkitään $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eli $\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ b + c - 2d = 0 \\ a + b + 2c - 2d = 0 \\ -b + c + d = 0. \end{cases}$

Koska kerroindeterminantti $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, niin yhtälöryhmällä on yksi-

käsitteinen ratkaisu $a = b = c = d = 0$, joten annetut vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

115. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, joten matriisit ovat lineaarisesti riippuvia.

b) Ehdosta $a \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ saadaan yhtälöryhmä $\begin{cases} 2a + 4b = 0 \\ 4a + 8b = 0 \\ a + 2b = 0 \\ 3a + 5b = 0, \end{cases}$ joka

toteutuu vain arvoilla $a = b = 0$. Matriisit ovat siis lineaarisesti riippumattomia.

c) Ehtoon $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ liittyy yhtälöryhmä $\begin{cases} 2a + 2b = 4 \\ -a + 2b = 1. \end{cases}$ Sen rat-

kaisu $a = b = 1$. Huomataan, että nämä luvut toteuttavat matriisiyhtälön, joten annetut matriisit ovat lineaarisesti riippuvia.

d) Ehdosta $a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ saadaan yhtälöryhmä

$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b - 3c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ a - 3c = 0, \end{cases}$ joka toteutuu vain arvoilla $a = b = c = 0$. Matriisit ovat siis lineaarisesti riippumattomia.

116. a) Yhtälö $a(X + Y) + b(X - Y) = O$ saadaan muotoon $(a + b)X + (a - b)Y = O$. Koska vektorit X ja Y ovat lineaarisesti riippumattomia, niin $a + b = a - b = 0$. Tämä yhtälöpari toteutuu vain, kun $a = b = 0$, joten $X + Y$ ja $X - Y$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

b) Yhtälö $aX + b(X + Y) + c(X - Y) = O$ saadaan muotoon $(a + b + c)X + (b - c)Y = O$. Koska vektorit X ja Y ovat lineaarisesti riippumattomia, niin $a + b + c = b - c = 0$. Tämä yhtälöpari toteutuu aina, kun $c = b$ ja $a = -2b$, esimerkiksi arvoilla $a = -2, b = 1, c = 1$. Vektorit $X, X + Y$ ja $X - Y$ ovat siis lineaarisesti riippuvia.

Toisin:

Yhtälö $X = a(X + Y) + b(X - Y)$ saadaan muotoon $(a + b - 1)X + (a - b)Y = O$. Koska vektorit X ja Y ovat lineaarisesti riippumattomia, niin $a + b - 1 = 0$ ja $a - b = 0$. Yhtälöparin ratkaisu on $a = b = \frac{1}{2}$. Siis vektorit $X, X + Y$ ja $X - Y$ ovat lineaarisesti riippuvia.

c) Yhtälö $a(X + 2Y) + b(2X - Y) = O$ saadaan muotoon $(a + 2b)X + (2a - b)Y = O$. Koska vektorit X ja Y ovat lineaarisesti riippumattomia, niin $a + 2b = 2a - b = 0$. Tämä yhtälöpari toteutuu vain, kun $a = b = 0$, joten $X + 2Y$ ja $2X - Y$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

117. Koostukoon S vektoreista $X_1, X_2, \dots, X_k$. Koska S on lineaarisesti riippuva, niin yhtälö $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k = 0$ toteutuu joillakin reaaliluvuilla $a_1, a_2, \dots, a_k$, joista ainakin yksi eroaa nolasta. Liitetään tämän yhtälön vasemman puolen termeiksi kaikki erotusjoukon $T \setminus S$ vektorit nolalla kerrottuna, jolloin mukana ovat kaikki T :n vektorit. Määritelmän mukaan nähdään tällöin, että joukko T on lineaarisesti riippuva.
118. Jos S :n osajoukko R olisi lineaarisesti riippuva, niin edellisen tehtävän mukaan myös joukko S olisi lineaarisesti riippuva. Tämä on vastoin oletusta, joten osajoukko R on lineaarisesti riippumaton.

5 Kanta ja dimensio

119. Avaruuden $\mathbf{R}^2$ kaikissa kannoissa on kaksi alkia. Kahden vektorin joukko on kanta, mikäli kyseiset vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Ehdosta $a \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ saatavalla yhtälöparilla $\begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$ on ainoana ratkaisu $a = b = 0$, joten vektorit $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippumattomia ja muodostavat siis avaruuden $\mathbf{R}^2$ kannan.

120. a) Ehdosta $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ saatavalla yhtälöparilla $\begin{cases} a + b = x \\ a + 2b = y \end{cases}$ on yksikäsitteinen ratkaisu $a = 2x - y$, $b = y - x$, joten $\{X, Y\}$ on avaruuden $\mathbf{R}^2$ kanta.

Toisin:

Avaruuden $\mathbf{R}^2$ kaikissa kannoissa on kaksi alkia. Kahden vektorin joukko on kanta, mikäli kyseiset vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Ehto $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eli $\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$ toteutuu vain arvoilla $a = b = 0$, joten vektorit X ja Y ovat lineaarisesti riippumattomia. Siis $\{X, Y\}$ on kanta.

- b) $X = -\frac{1}{3}Y$, joten X ja Y ovat lineaarisesti riippuvia. Siksi $\{X, Y\}$ ei ole avaruuden $\mathbf{R}^2$ kanta.

121. a) Olkoon $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mielivaltainen avaruuden $\mathbf{R}^3$ vektori. Ehtoa $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vastaavalla yhtälöryhmällä $\begin{cases} a + 2b + c = x \\ 2a + c = y \\ 3a + 2b + c = z \end{cases}$ on yksikäsitteinen ratkaisu, koska

kerroindeterminantti $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Näin ollen annetut vektorit muodostavat avaruuden $\mathbf{R}^3$ kannan.

Toisin:

Avaruuden $\mathbf{R}^3$ kaikissa kannoissa on kolme alkioita. Kolmen vektorin joukko on kanta, mikäli kyseiset vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

$$\text{Ehdosta } a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ saatavalla yhtälöryhmällä } \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \text{ on vain}$$

triviaaliratkaisu $a = b = c = 0$, joten vektorit $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippumattomia ja muodostavat siis kannan.

b) Yhtälöstä $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ saatava kerroindeterminantti $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ on nolla, joten yhtälöllä ei ole yksikäsitteistä ratkaisua.. Annetut vektorit eivät näin ollen muodosta kantaa. Tämä seuraa myös siitä, että $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ eli kyseiset vektorit ovat lineaarisesti riippuvia.

d) Vektoreiden $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ joukko ei ole kanta, sillä avaruuden $\mathbf{R}^3$ kannassa

on kolme alkioita. Nähdään myös helposti, että $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, joten vektorit eivät ole lineaarisesti riippumattomia.

122. Yhtälöllä $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$ on yksikäsitteinen ratkaisu, jos kerroindeterminantti $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix}$ eroaa nolasta. Determinantti on arvoltaan $t - 4$ ja eroaa nolasta, kun $t \neq 4$. Annetut vektorit muodostavat näin ollen kannan, jos $t \neq 4$.

123. Olkoon $\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ mielivaltainen. Yhtälö

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

voidaan kirjoittaa muotoon $\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, josta näkyy, että yksikäsitteisesti $a_1 = x, a_2 = y, a_3 = z, a_4 = u$. Se merkitsee, että $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ on avaruuden $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ kanta.

***124.** Oletuksesta, että jokainen V :n vektori X voidaan esittää muodossa

$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$, seuraa suoraan kannan ensimmäinen vaatimus. Koska myös nollavektori voidaan esittää vastaavassa muodossa, voidaan kirjoittaa $c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n = O$. Toisaalta myös $0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \dots + 0 \cdot X_n = O$, joten yksikäsitteisyyden perusteella $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Joukko $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ on siis lineaarisesti riippumaton, joten se on V :n kanta.

Sisätuloavaruus

1 Sisätulo

$$127. \text{ a) } \cos(X, Y) = \frac{X \cdot Y}{|X||Y|} = \frac{3 \cdot 1 + (-1) \cdot 4}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{17}}, \text{ josta } (X, Y) \approx 94,4^\circ.$$

$$\text{ b) } \cos(X, Y) = \frac{X \cdot Y}{|X||Y|} = \frac{2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot (-1)}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{1}{2}, \text{ josta } (X, Y) = 120^\circ.$$

$$128. \ a, b, c \in \mathbf{R}$$

$$1. \text{ Jos } a \neq 0, \text{ niin } a \cdot a = a^2 > 0.$$

$$2. \ ab = ba$$

$$3. \ (a+b)c = ac+bc$$

$$4. \ (ab)c = a(bc)$$

Koska reaalityyppisten kertoalasku täyttää kaikki sisätulon määritelmässä mainitut ehdot, se on sisätulo.

$$129. \ X, Y, Z \in \mathbf{R}^2$$

$$1. \ (X|X) = x_1^2 + 2x_2^2. \text{ Jos } X \neq O, \text{ niin } x_1 \neq 0 \text{ tai } x_2 \neq 0, \text{ joten } (X|X) > 0.$$

$$2. \ (X|Y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 = y_1 x_1 + 2y_2 x_2 = (Y|X)$$

$$\begin{aligned}
3. \quad (X+Y|Z) &= (x_1+y_1)z_1 + 2(x_2+y_2)z_2 \\
&= (x_1z_1 + 2x_2z_2) + (y_1z_1 + 2y_2z_2) \\
&= (X|Z) + (Y|Z)
\end{aligned}$$

$$4. \quad (aX|Y) = ax_1y_1 + 2ax_2y_2 = a(x_1y_1 + 2x_2y_2) = a(X|Y), \quad a \in \mathbb{R}$$

Koska kaikki sisätulon määritelmässä mainitut ehdot toteutuvat, annettu yhtälö määrittelee sisätulon.

130. $A, B, C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$1. \quad (A|A) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2. \text{ Jos } A \neq O, \text{ niin jokin luvuista } a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \text{ ei ole nolla, joten } (A|A) > 0.$$

$$\begin{aligned}
2. \quad (A|B) &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \\
&= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{12} + b_{21}a_{21} + b_{22}a_{22} \\
&= (B|A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad (A+B|C) &= (a_{11}+b_{11})c_{11} + (a_{12}+b_{12})c_{12} + (a_{21}+b_{21})c_{21} + (a_{22}+b_{22})c_{22} \\
&= (a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22}) + (b_{11}c_{11} + b_{12}c_{12} + b_{21}c_{21} + b_{22}c_{22}) \\
&= (A|C) + (B|C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad (aA|B) &= aa_{11}b_{11} + aa_{12}b_{12} + aa_{21}b_{21} + aa_{22}b_{22} \\
&= a(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}) \\
&= a(A|B)
\end{aligned}$$

Koska kaikki sisätulon määritelmässä mainitut ehdot toteutuvat, annettu yhtälö määrittelee sisätulon.

$$*131.a) \quad (O|X) = (O+O|X) = (O|X) + (O|X), \text{ joten tulee olla } (O|X) = 0.$$

$$b) \quad (X|Y+Z) = (Y+Z|X) = (Y|X) + (Z|X) = (X|Y) + (X|Z)$$

$$c) \quad (X|aY) = (aY|X) = a(Y|X) = a(X|Y)$$

2 Normi

$$134. \quad X = (3 \ -1 \ 2 \ a)^T, \text{ joten } \|X\| = \sqrt{(X|X)} = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2 + a^2} = \sqrt{14 + a^2}. \text{ Yhtälöstä } \sqrt{14 + a^2} = 4 \text{ saadaan } a = \pm\sqrt{2}.$$

$$135. \quad d(X|Y) = \|X-Y\|. \text{ Nyt } X-Y = (-3, 2, -2, -4, 1, -1)^T, \text{ joten } \|X-Y\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{35}.$$

3 Kohtisuoruus

138. $\|X\| = \sqrt{71}$, $\|Y\| = \sqrt{122}$ ja $(X|Y) = 79$, joten $\cos(X, Y) = \frac{79}{\sqrt{71} \cdot \sqrt{122}}$. Tästä $(X, Y) \approx 31,9^\circ$.
139. Vektorit $(-2 \ 1 \ 5 \ -3)^T$ ja $(3 \ -1 \ 2 \ a)^T$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden sisätulo on nolla eli jos $-6 - 1 + 10 - 3a = 0$. Tästä $a = 1$.
140. $(A|B) = 6 \cdot (-1) + (-2) \cdot 5 + 8 \cdot 2 = 0$. Joukon $\{A, B\}$ vektorit ovat siis kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten joukko on ortogonaalinen.
141. $(A|B) = \frac{1}{5}(-2 + 2) = 0$, joten $A \perp B$. Lisäksi $\|A\| = \|B\| = 1$, joten joukko $\{A, B\}$ on ortonormaali.
142. $(E|F) = 1 - 2 + 1 = 0$, $(E|G) = -1 + 0 + 1 = 0$ ja $(F|G) = -1 + 0 + 1 = 0$. Joukon $\{E, F, G\}$ jokainen vektori on siis kohtisuorassa kaikkia muita saman joukon vektoreita vastaan, joten joukko on ortogonaalinen.
143. $(X_1|X_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1 + 0 + 1) = 0$, $(X_1|X_3) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1 - 2 + 1) = 0$ ja $(X_2|X_3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1 + 0 + 1) = 0$, joten joukko $\{X_1, X_2, X_3\}$ on ortogonaalinen. Koska $\|X_1\| = \|X_2\| = \|X_3\| = 1$, joukko on myös ortonormaali. Tiedetään, että ortonormaali joukko on lineaarisesti riippumaton ja että avaruuden $\mathbf{R}^3$ kaikissa kannoissa on kolme alkia. Siksi avaruuden $\mathbf{R}^3$ ortonormaali joukko $\{X_1, X_2, X_3\}$ on tämän avaruuden ortonormaali kanta.
144. a) $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $X_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Koska $\{X_1, X_2, X_3\}$ on ortonormaali kanta, niin $Y = (Y|X_1)X_1 + (Y|X_2)X_2 + (Y|X_3)X_3$. Saadaan $Y = (-1)X_1 + (-\sqrt{2})X_2 + \sqrt{2}X_3 = -X_1 - \sqrt{2}X_2 + \sqrt{2}X_3$.
- b) $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $Y = (Y|E_1)E_1 + (Y|E_2)E_2 + (Y|E_3)E_3 = E_1 + \sqrt{3}E_2 - E_3$

Tason lineaarikuvaukset

1 Lineaarikuvaus

145. Olkoon $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, jolloin $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$ ja $T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ 3v \end{pmatrix}$.

1. $T(X + Y) = T\begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x+u) \\ 3(y+v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2u \\ 3v \end{pmatrix} = T(X) + T(Y)$.

2. $T(aX) = T\begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ax \\ 3ay \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix} = aT(X)$, $a \in \mathbf{R}$.

Määritelmän nojalla T on lineaarikuvaus.

146. Olkoon $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, jolloin $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y^2 \end{pmatrix}$ ja $T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v^2 \end{pmatrix}$.

1. $T(X + Y) = T\begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u \\ (y+v)^2 \end{pmatrix}$. Tämä ei ole identtisesti sama kuin $\begin{pmatrix} x+u \\ y^2 + v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v^2 \end{pmatrix} = T(X) + T(Y)$, joten T ei ole lineaarikuvaus.

147. $T(a_1X_1 + a_2X_2) = T(a_1X_1) + T(a_2X_2) = a_1T(X_1) + a_2T(X_2)$

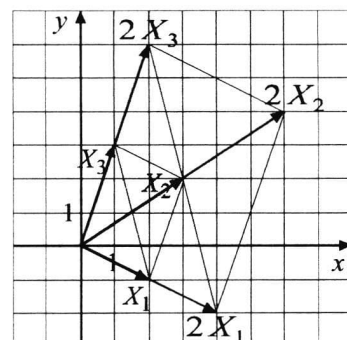
148. $F\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + F\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Mutta $F\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, joten F ei ole lineaarikuvaus.

2 Venytys

150. Oheinen kuva havainnollistaa lineaarikuvausta $T(X) = 2X$. Kysymyksessä on yhdenmuotoisuuskuvaus mittakaavassa 2. Tuloksena saadun kolmion kärkipisteet ovat $(4, -2)$, $(6, 4)$ ja $(2, 6)$.

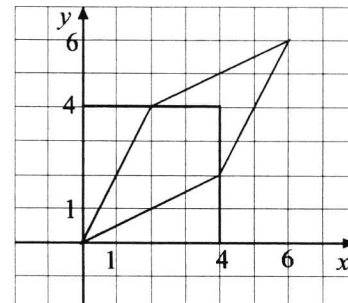
Kuvauksen matriisi on $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.



151. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sen käänteismatriisi on $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Matriisi A^{-1} välittää yhdenmuotoisuuskuvauksen mittakaavassa 0,5 eli kutistaa kuvion puoleen alkuperäisestä koostaan.

153. $T(X) = AX = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + y \end{pmatrix}$. Kuvaus T on

lineaarikuvaus (Calculus 11 esimerkki 2 s. 72). Se kuvaa neliön kärkipisteet $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 4)$ ja $(0, 4)$ pisteiksi $(0, 0)$, $(4, 2)$, $(6, 6)$ ja $(2, 4)$. Oheinen piirros havainnollistaa kuvausta T .



3 Peilaus

154. Oheisessa kuvassa ovat nelikulmiot N , N_1 ja N_2 .

Nelikulmio N voidaan esittää matriisina

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

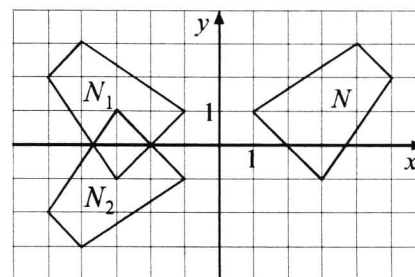
Lasketaan nelikulmiota N_1 esittävä matriisi. Siitä käyvät ilmi kärkipisteet.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lasketaan nelikulmiota N_2 esittävä matriisi. Siitä käyvät ilmi kärkipisteet.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Nelikulmio N_2 saadaan N_1 :stä peilauksella x -akselin suhteen.



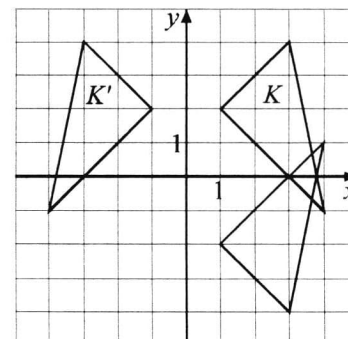
155. Kolmio K saadaan peilaamalla K' origon suhteen ja näin saatu kolmio x -akselin suhteen. Kuvauksen välittää

matriisitulo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Huomataan,

että tulos saadaan suoraan peilauksella y -akselin suhteen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Kolmion K kärkipisteet ovat $(4, -1)$, $(3, 4)$ ja $(1, 2)$.



157. $T = ABC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Kysymyksessä on identtinen kuvaus.

4 Projektiio

158. a) $E \cdot X = \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = (-0,8) \cdot (-5) + 0,6 \cdot 7 = 4 + 4,2 = 8,2$

$E^T X = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = ((-0,8) \cdot (-5) + 0,6 \cdot 7) = (4 + 4,2) = (8,2)$. Tulos tarkoittaa lukua $8,2 = E \cdot X$.

b) $E \cdot X = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e_1 x_1 + e_2 x_2$

$E^T X = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (e_1 x_1 + e_2 x_2)$. Tulos tarkoittaa lukua $e_1 x_1 + e_2 x_2 = E \cdot X$.

159. a) y -akselin suuntainen yksikkövektori on $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, joten projektiokuvauksen y -akselille välittää matriisi $E_2 E_2^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vektorin X projektiio on vektori $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Suoran $x - y = 0$ kulmakerroin on 1, joten suoran suuntaiseksi yksikkövektoriksi sopii $E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Projektiokuvauksen välittää matriisi $EE^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vektorin X projektiio on vektori $Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

160. a) Suoran $y = 2x$ kulmakerroin on 2, joten suoran suuntaiseksi yksikkövektoriksi sopii $E = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Projektiokuvauksen välittää matriisi $EE^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Vektorin X projektiio on vektori $Y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ 3,2 \end{pmatrix}$.

b) Suorat $y = 2x$ ja $y = 2x - 2$ ovat yhdensuuntaiset, joten tuloksena on sama vektoriprojektiio kuin a-kohdassa.

161. a) Pisteen $(-2, 3)$ etäisyys suorasta $4x - 3y - 8 = 0$ on $\frac{|4 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 - 8|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5$.

b) Pisteen $(-2, 3)$ etäisyys suorasta $2x - y + 2 = 0$ on $\frac{|2 \cdot (-2) - 3 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

- c) Pisteen $(-2, 3)$ etäisyys suorasta $3x + y + 3 = 0$ on $\frac{|3 \cdot (-2) + 3 + 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{10}} = 0$.
- d) Pisteen $(-2, 3)$ etäisyys suorasta $12x - 5y = 0$ on $\frac{|12 \cdot (-2) - 5 \cdot 3|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{39}{13} = 3$.

162. Olkoon (x, y) sen suoran piste, joka on etäisyydellä 2 suorasta $4x + 3y - 7 = 0$. Silloin $\frac{|4x + 3y - 7|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|4x + 3y - 7|}{5} = 2$. Saadaan $4x + 3y - 7 = \pm 10$, josta $4x + 3y + 3 = 0$ tai $4x + 3y - 17 = 0$. Saadut yhtälöt ovat kysytyjen suorien yhtälöt.

163. Olkoon (x, y) suorien $4x - 2y + 1 = 0$ ja $x - 2y + 3 = 0$ välisen kulman puolittajan piste. Koska se on yhtä etäällä kulman kyljistä, niin $\frac{|4x - 2y + 1|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{|x - 2y + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$ eli $|4x - 2y + 1| = 2|x - 2y + 3|$. Tästä $4x - 2y + 1 = \pm 2(x - 2y + 3)$ ja edelleen $2x + 2y - 5 = 0$ tai $6x - 6y + 7 = 0$. Nämä ovat kysytyt kulmanpuolittajat.

164. Suoran $y = x$ suuntainen yksikkövektori on $E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Peilauksen suoran $y = x$ suhteen välittää matriisi

$$\begin{aligned} A &= 2EE^T - I = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 1) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vektorin $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ peilikuva on vektori $Y = AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Pisteen (x, y) peilikuva suoran $y = x$ suhteen on siis (y, x) .

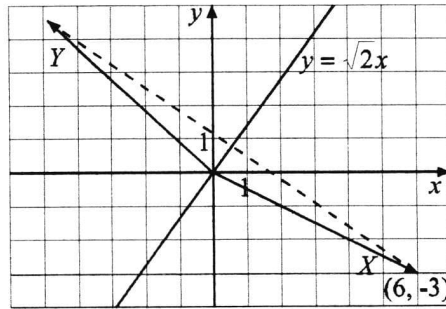
165. Suoran $y = \sqrt{2}x$ suuntainen yksikkövektori on $E = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Peilauksen suoran $y = \sqrt{2}x$ suhteen välittää matriisi

$$\begin{aligned} A &= 2EE^T - I = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \ \sqrt{2}) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vektorin $X = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ peilikuva on vektori

$$Y = AX = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -4,83 \\ 4,66 \end{pmatrix}. \text{ Saadaan tulokseksi, että}$$

pisteen $(6, -3)$ peilikuva on piste $(-2\sqrt{2} - 2, 4\sqrt{2} - 1) \approx (-4,83; 4,66)$.



5 Kierto

168. Kierto kuvaa vektorin $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektoriksi $Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Pisteestä $(4, 4)$ saadaan piste $(0, 4\sqrt{2})$.

169. Kierto kuvaa vektorin $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ vektoriksi $Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Pisteestä $(0, \sqrt{3})$ saadaan piste $(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

170. 150° :n kierro negatiiviseen suuntaan johtaa samaan kuin 210° :n kierro positiiviseen suuntaan. Kierron välittää matriisi $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Kierto kuvaa vektorin $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

vektoriksi $Y = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2\sqrt{3} \\ -2 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1,46 \\ -5,46 \end{pmatrix}$. Pisteestä $(4, 4)$ saadaan piste $(2 - 2\sqrt{3}, -2 - 2\sqrt{3}) \approx (-1,46; -5,46)$.

$$\begin{aligned}
 171. \quad A^2 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

*172. Kierron välittää matriisi $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, jossa α on tylppä kulma. Kuvausyhtälöstä

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,08 & -4,95 & -0,48 \\ 1,87 & -1,21 & -1,33 \end{pmatrix} \text{ saadaan esimerkiksi yhtälö-}$$

pari $\begin{cases} 3 \cos \alpha - 2 \sin \alpha = -3,08 \\ 3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha = 1,87. \end{cases}$ Siitä $13 \cos \alpha = -5,5$ ja $\alpha \approx 115^\circ$.

*173. Kierron välittää matriisi $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ja peilauksen matriisi $T_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Olkoon

$$T_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Kun annettuun kolmioon } K = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ sovelletaan mainitut kuvauk-}$$

set, saadaan $T_3 T_2 T_1 K = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -6 & -15 & -12 \end{pmatrix} = K'$. Kolmion K' kärkipisteet ovat $(3, -6)$, $(6, -15)$ ja $(12, -12)$.

*174. Kierrossa paraabelin $y = x^2$ pisteen (x, y) paikkavektorista $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ saadaan vektori $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

joka taas palautuu alkuperäiseksi vektoriksi 45° :n kierrolla positiiviseen suuntaan.

Jälkimmäisen kierron välittää matriisi

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ joten } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x' - y' \\ x' + y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \text{ Näin}$$

ollen $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$ ja $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$. Koska nämä koordinaatti-
arvot toteuttavat al-

kuperäisen paraabelin yhtälön $x^2 - y = 0$, niin $\frac{1}{2}(x' - y')^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') = 0$ eli

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - x'y' - \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = 0. \text{ Kierretyn paraabelin pisteet toteuttavat siis yhtä-}$$

lön $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy - \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0$, joka 2:lla kerrottuna saa muodon

$$x^2 + y^2 - 2xy - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0.$$

*175. Kierrossa hyperbelin $xy = 1$ pisteen (x, y) paikkavektorista $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ saadaan vektori $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

joka taas palautuu alkuperäiseksi vektoriksi 135° :n kierrolla negatiiviseen suuntaan eli 225° :n kierrolla positiiviseen suuntaan. Jälkimmäisen kierron välittää matriisi

$$\begin{pmatrix} \cos 225^\circ & -\sin 225^\circ \\ \sin 225^\circ & \cos 225^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ joten } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -x' + y' \\ -x' - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

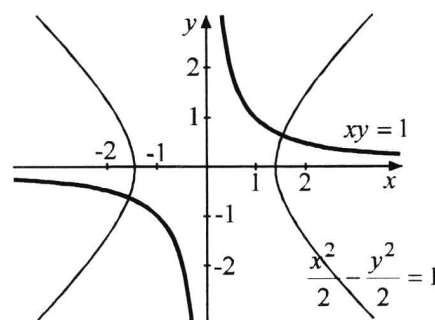
Näin ollen $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')$ ja $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' - y')$. Koska nämä koordinaatti-
arvot to-

teuttavat alkuperäisen hyperbelin yhtälön $xy = 1$,

niin $\frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' - y') = 1$ eli

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1. \text{ Kierretyn hyperbelin pisteet toteut-}$$

tavat siis yhtälön $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$.



Kertauskoe 1

$$1. \quad f(A) = A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad A^3 = A^2 A = IA = A, \quad A^4 = A^3 A = A^2 = I, \dots, \quad A^{11} = A$$

$$3. \quad \|X\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \|Y\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$(X|Y) = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-3)} = 0, \text{ mikä merkitsee, että } X \perp Y.$$

$$4. \quad \text{a) } KR = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 23 & 4 & 19 \\ 15 & 18 & 4 & 20 \\ 24 & 48 & 14 & 29 \end{pmatrix}. \text{ Matriisitulo } KR \text{ ilmoittaa,}$$

kuinka paljon mitäkin raaka-ainetta tarvitaan tuotteisiin A , B ja C . Esimerkiksi tuotteeseen A tarvitaan raaka-ainetta II yhteensä 23 kg.

$$\text{b) } KRH = \begin{pmatrix} 19 & 23 & 4 & 19 \\ 15 & 18 & 4 & 20 \\ 24 & 48 & 14 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 85 \\ 68 \\ 24 \\ 93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,042 \\ 4\,455 \\ 8\,337 \end{pmatrix}. \text{ Matriisitulo } KRH \text{ ilmoittaa, kuinka}$$

paljon kuhunkin tuotteeseen tarvittavat raaka-aineet maksavat. Esimerkiksi raaka-aineet tuotteeseen A maksavat 5 042 mk.

$$5. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{12}(-1), A_{13}(-2), A_{14}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_2(-\frac{1}{2})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{23}(1), A_{24}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_3(-\frac{1}{2}), M_4(-\frac{1}{2})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu on $x = 2, y = -2, z = -1$.

$$6. \quad \text{Yhtälöä } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vastaa yhtälöryhmä } \begin{cases} -4a + b + 6c = x \\ -3a - 2b = y \\ 4a + 3b = z. \end{cases}$$

Sen kerroinmatriisi $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 6 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, joten yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu. Vektorit $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ muodostavat siis avaruuden $\mathbf{R}^3$ kannan.

Toisin:

Avaruuden $\mathbf{R}^3$ jokaisessa kannassa on kolme vektoria. Vektorit $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ muodostavat kannan, mikäli ne ovat lineaarisesti riippumattomia. Yhtälöä $a \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vastaavan yhtälöryhmän $\begin{cases} -4a + b + 6c = 0 \\ -3a - 2b = 0 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases}$ ainoa ratkaisu on $a = b = c = 0$, joten annetut vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia ja muodostavat siis kannan.

7. Suoran $3x - 4y = 0$ kulmakerroin on $\frac{3}{4}$, joten $E = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix}$ on suoran suuntainen yksikkövektori. Peilauksen suoran suhteen välittää matriisi $A = 2EE^T - I$
 $= 2 \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,28 & 0,96 \\ 0,96 & -0,28 \end{pmatrix}$. Vektorin $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ peilikuva on vektori $AX = \begin{pmatrix} 0,28 & 0,96 \\ 0,96 & -0,28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,12 \\ -0,16 \end{pmatrix}$. Pisteen $(1, 4)$ peilikuva suoran $3x - 4y = 0$ suhteen on siis $(4,12; -0,16)$.

8. 1. $(X|X) = x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2$. Jos $X \neq O$, niin $x_1 \neq 0$ tai $x_2 \neq 0$, jolloin $(X|X) > 0$.
 2. $(X|Y) = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2 = y_1x_1 - y_2x_1 - y_1x_2 + 3y_2x_2 = (Y|X)$
 3. $(X + Y|Z) = (x_1 + y_1)z_1 - (x_2 + y_2)z_1 - (x_1 + y_1)z_2 + 3(x_2 + y_2)z_2$
 $= (x_1z_1 - x_2z_1 - x_1z_2 + 3x_2z_2) + (y_1z_1 - y_2z_1 - y_1z_2 + 3y_2z_2)$
 $= (X|Z) + (Y|Z)$
 4. $(aX|Y) = ax_1y_1 - ax_2y_1 - ax_1y_2 + 3ax_2y_2 = a(x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2) = a(X|Y)$
 Kaikki sisätulon määritelmässä mainitut ehdot toteutuvat, joten kysymyksessä on sisätulo.

9. Olkoon $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, jolloin $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$ ja $T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \end{pmatrix}$.

$$1. T(X + Y) = T \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + u + y + v \\ x + u - y - v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \end{pmatrix} = T(X) + T(Y).$$

$$2. T(aX) = T \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + ay \\ ax - ay \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} = aT(X), \quad a \in \mathbf{R}.$$

Määritelmän nojalla T on lineaarikuvaus.

Kertauskoe 2

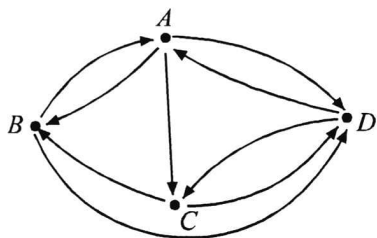
1. $A^T - 2A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
2. Matriisi $A = \begin{pmatrix} k & 3 \\ 3-k & 2k \end{pmatrix}$ ei ole säännöllinen eli sillä ei ole käänteismatriisiä, jos $\det A = 0$ eli $2k^2 - 3(3-k) = 0$. Yhtälön ratkaisu on $k = -3$ tai $k = 1\frac{1}{2}$.
3. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix}$. Matriisitulo välittää 90° :n kierron origon ympäri positiiviseen suuntaan.
- b) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Kysymyksessä on venytys mittakaavassa 6.
4.
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{13}(-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{23}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_2(-1), A_{32}(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{21}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Käänteismatriisi on } \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
5. Avaruuden $\mathbf{R}^3$ jokaisessa kannassa on kolme vektoria. Helposti nähdään, että $\|X_1\| = \|X_2\| = \|X_3\| = 1$. Laskemalla sisätulot huomataan, että $X_1 \perp X_2$, $X_1 \perp X_3$ ja $X_2 \perp X_3$. Joukko $\{X_1, X_2, X_3\}$ on siis avaruuden $\mathbf{R}^3$ ortonormaali kanta. (Sisätuloavaruuden ortonormaali joukko on lineaarisesti riippumaton.)

6.



		Mihin			
		A	B	C	D
Mistä	A	0	1	1	1
	B	1	0	0	1
	C	0	1	0	1
	D	1	0	1	0

Digraafia vastaa edellisen sivun matriisi M . Sen neliö on $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) B saa yhteyden C :hen kahdella eri tavalla yhden välittäjähenkilön kautta. (Matriisin vastaava alkio on 2.)
 b) C ei saa yhteyttä B :hen yhden välittäjähenkilön kautta. (Matriisin vastaava alkio on nimittäin 0.)

7. Olkoon $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ todennäköisyysmatriisi. Silloin kaikki sen alkioit ovat ei-negatiiviset ja $a_{11} + a_{12} = 1$ ja $a_{21} + a_{22} = 1$. Muodostetaan neliömatriisi.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Sen kaikki alkioit ovat ei-negatiivisia. Lisäksi

$$a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} = a_{11}(a_{11} + a_{12}) + a_{12}(a_{21} + a_{22}) = a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 1 = 1 \text{ ja}$$

$$a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{21}a_{12} + a_{22}^2 = a_{21}(a_{11} + a_{12}) + a_{22}(a_{21} + a_{22}) = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 1 = 1.$$

Näin ollen myös A^2 on todennäköisyysmatriisi.

8. Jos $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in U$ ja $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in U$, niin $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$.

Koska summan $A_1 + A_2$ alkioit ovat kokonaislukuja, niin $A_1 + A_2 \in U$.

Jos $r \in \mathbf{R}$ ja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$, niin matriisi $rA = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}$ ei kuulu joukkoon U kaikilla r :n arvoilla, koska sen alkioit eivät aina ole kokonaislukuja. Näin ollen joukko U ei ole avaruuden V aliavaruus.

9. Kolmio $A(2,1)B(6,1)C(6,3)$ voidaan ilmaista matriisina $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Kierron välittää

$$\text{matriisi } \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

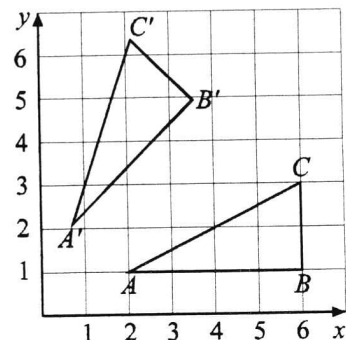
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,71 & 3,54 & 2,12 \\ 2,12 & 4,95 & 6,36 \end{pmatrix}$$

Kolmion $A'B'C'$ kärjet ovat

$$A' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \approx (0,71; 2,12),$$

$$B' = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}} \right) \approx (3,54; 4,95) \text{ ja}$$

$$C' = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}} \right) \approx (2,12; 6,36).$$



Kertauskoe 3

$$1. \quad X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12 & 8 \\ -2 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -1 & -14 \end{pmatrix}$$

$$X^T = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -10 & -14 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2r+1 \\ 0 & r & 0 \\ 3 & 0 & r+2 \end{pmatrix} \text{ ja } BA = \begin{pmatrix} 2+r & 0 & 1+2r \\ 0 & r & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Tulomatriisit ovat samat, kun } r=1.$$

3. $A_{2 \times 2} B_{2 \times 3} C_{3 \times 2}$ on määritelty.
 $A_{2 \times 2} C_{3 \times 2} B_{2 \times 3}$ ei ole määritelty.
 $B_{2 \times 3} A_{2 \times 2} C_{3 \times 2}$ ei ole määritelty.
 $B_{2 \times 3} C_{3 \times 2} A_{2 \times 2}$ on määritelty.
 $C_{3 \times 2} A_{2 \times 2} B_{2 \times 3}$ on määritelty.
 $C_{3 \times 2} B_{2 \times 3} A_{2 \times 2}$ ei ole määritelty.

Vastaus: ABC , BCA ja CAB

4. Vaihdetään aluksi ensimmäisen ja toisen yhtälön paikat.

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ y+2z=6 \\ 2x-3y+2z=2 \end{array} \right. \cdot (-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ y+2z=6 \\ -7y=0 \end{array} \right. \cdot 7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ y+2z=6 \\ 14z=42 \end{array} \right. \cdot 1$$

Alimmasta yhtälöstä saadaan $z=3$ ja sitten takaisinsijoituksilla $y=0$ ja $x=-2$.

Vastaus: $x=-2$, $y=0$ ja $z=3$

$$5. \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ josta } \begin{cases} -a+6b=-5 \\ 3a-2b=7 \\ a+4b=0. \end{cases} \text{ Yhtälöryhmällä on ratkaisu } a=2 \text{ ja } b=-\frac{1}{2}, \text{ joten } \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

6. Kuvaus on venytys mittakaavassa 5. Kolmiot K_1 ja K ovat yhdenmuotoisia mittakaavassa 5, joten niiden pinta-alojen suhde on 25. Kolmion K pinta-ala on 4,5, joten kolmion K_1 pinta-ala on $25 \cdot 4,5$. Pinta-alan muutos on siis $24 \cdot 4,5 = 108$ yksikköä.

7. Summa $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$ on V :n alkio, samoin tulo $a \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ 1 \end{pmatrix}$. Tutkitaan laskusääntöjen 1 - 8 voimassaolo.

$$1. \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y+z \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$3. \text{Nolla-alkio on } O = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ja se kuuluu } V\text{:hen.}$$

$$4. \text{Alkion } \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vasta-alkio on } \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ja se kuuluu } V\text{:hen.}$$

$$5. a \left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} \right) = a \begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+ay \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ay \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$6. (a+b) \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bx \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bx \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$7. a \left(b \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right) = a \begin{pmatrix} bx \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abx \\ 1 \end{pmatrix} = (ab) \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$8. 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koska lineaariavaruuden määritelmän kaikki ehdot toteutuvat, V on lineaariavaruus.

8. Olkoot $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ja $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ mielivaltaisia avaruuden $\mathbf{R}^2$ vektoreita.

$$F(X+Y) = F \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix} = (x+u)^2 + (y+v)^2 \\ = (x^2 + y^2) + (u^2 + v^2) + 2(xu + yv) = F(X) + F(Y) + 2(xu + yv)$$

Koska $2(xu + yv)$ ei identtisesti häviä, lineaarikuvauksen määritelmän ensimmäinen ehto ei toteudu. Kuvaus F ei ole lineaarikuvaus.

Voidaan myös käyttää vastaesimerkkiä:

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \text{ ja } F \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4. \text{ Silloin } F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 5. \text{ Toisaalta } F \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ = F \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 9, \text{ joten } F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq F \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

9. Suoran $3x - y = 0$ kulmakerroin on 3, joten tämän suoran suuntaiseksi yksikkövektori sopii $E = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Projektiokuvauksen välittää matriisi $EE^T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix}$. Vektorin X projektio on $Y = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 2,4 \end{pmatrix}$.

Vastaus: Kuvausmatriisi on $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix}$, ja vektoriprojektio on $\begin{pmatrix} 0,8 \\ 2,4 \end{pmatrix}$

Kertauskoe 4

1. $A^2 = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 9 \\ -7 & 1 & 8 \\ -11 & 1 & 13 \end{pmatrix}$, joten päälävistäjäalkioiden summa on $-7 + 1 + 13 = 7$.

2. Esimerkki: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Matriisilla $A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ on käänteismatriisi vain, jos $\det A \neq 0$.

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2 + 2a) - a(-2 - 2a) + 4 = 2a^2 + 6a$$

$\det A = 0$, kun $a = 0$ tai $a = -3$. Matriisilla on käänteismatriisi, kun $a \neq 0$ ja $a \neq -3$.

4. $\begin{cases} 4x + ay = 2 \\ ax + y = 1 \end{cases} \cdot a, a \neq 0 \quad \begin{cases} 4x + ay = 2 \\ (a^2 - 4)y = 2(a - 2) \end{cases}$

Jos $a = -2$, jälkimmäinen yhtälö on identtisesti epätosi, joten yhtälöparilla ei ole ratkaisua. Jos $a = 2$, alkuperäiset yhtälöt ovat samat, joten ratkaisuja on äärettömän monta.

Tapauksessa $a = 0$ saadaan tarkalleen yksi ratkaisu $x = \frac{1}{2}$ ja $y = 1$.

Vastaus: a) $a \neq \pm 2$, b) $a = -2$, c) $a = 2$

5. $\begin{cases} -2x + y & = -1 \\ x - 2y + z & = 0 \\ y - 2z + u & = 0 \\ z - 2u & = 0 \end{cases} \cdot \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \quad \begin{cases} -2x + y & = -1 \\ -3y + 2z & = -1 \\ y - 2z + u & = 0 \\ z - 2u & = 0 \end{cases} \cdot \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x + y & = & -1 \\ -3y + 2z & = & -1 \\ -4z + 3u & = & -1 \\ z - 2u & = & 0 \end{array} \right. \cdot 1 \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + y & = & -1 \\ -3y + 2z & = & -1 \\ -4z + 3u & = & -1 \\ -5u & = & -1 \end{array} \right.$$

Viimeksi saadusta yhtälöstä ratkeaa suoraan u ja sitten edellisistä takasijoituksilla z , y ja x .

$$\text{Vastaus: } x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}, z = \frac{2}{5}, u = \frac{1}{5}$$

6. $(A|B) = \frac{1}{3} \cdot ((-1) \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot (-\frac{1}{3}) - 2 \cdot (-\frac{2}{3})) = \frac{1}{3} \cdot (-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{4}{3}) = 0$, mikä merkitsee, että $A \perp B$. Joukko $\{A, B\}$ on siis ortogonaalinen. Koska lisäksi

$$\|A\| = \sqrt{(A|A)} = \sqrt{\frac{1}{9}(1+4+4)} = 1 \text{ ja } \|B\| = \sqrt{(B|B)} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1,$$

niin joukko $\{A, B\}$ on ortonormaali.

7. Pisteen $(-3, 4)$ paikkavektori on $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Matriisi $A = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$ kuvaa vektorin X vektoriksi $Y = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Piste $(-3, 4)$ kuvautuu siis pisteeksi $(-5, 0)$.

Kuvaus on kierto origon ympäri vastapäivään. Nimittäin, jos $\cos \alpha = 0,6$, niin $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - 0,6^2} = \pm 0,8$. Koska vektorista $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ saadaan vektori $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, voidaan tulkita kiertokulman α olevan terävä. Siis $\sin \alpha = 0,8$. Kiertomatriisi on $A = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, jossa $\alpha \approx 53,1^\circ$.

8. 1. $(X|X) = 3x_1^2 + x_2^2$. Jos $X \neq O$, niin $x_1 \neq 0$ tai $x_2 \neq 0$, jolloin $(X|X) > 0$.
 2. $(X|Y) = 3x_1y_1 + x_2y_2 = 3y_1x_1 + y_2x_2 = (Y|X)$
 3. $(X + Y|Z) = 3(x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 = (3x_1z_1 + x_2z_2) + (3y_1z_1 + y_2z_2)$
 $= (X|Z) + (Y|Z)$
 4. $(aX|Y) = 3ax_1y_1 + ax_2y_2 = a(3x_1y_1 + x_2y_2) = a(X|Y)$

Kaikki sisätulon määritelmässä mainitut ehdot toteutuvat, joten yhtälö $(X|Y) = 3x_1y_1 + x_2y_2$ määrittelee erään sisätulon.

9. a) 18 yhteenlaskua ja 27 kertolaskua

b) Kahden n -vektorin kertomisessa tarvitaan n kertolaskua ja $n - 1$ yhteenlaskua. Matriisitulossa kerrotaan jokaisella vaakavektorilla toisen matriisin jokainen pystyvektori. Näitä vektoreiden keskeisiä kertolaskuja on siis n^2 , joten kertolaskuja tarvitaan kaikkiaan $n^2 \cdot n = n^3$. Tarvittavien yhteenlaskujen määrä on vastaavasti $n^2(n - 1)$.

9901454

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTON KIRJASTO



150 084 9294